УДК 629.7.058.47 + 629.783

Л. М. Рижков, Д. І. Степуренко, А. В. Семешко

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВОГО ПОЛОЖЕННЯ МІКРОСУПУТНИКА ШЛЯХОМ ВИКОРИСТАННЯ КІЛЬКОХ ОЦІНОК МАТРИЦІ ОРІЄНТАЦІЇ

Вступ

Існуючі методи визначення орієнтації космічних апаратів (КА) поділяють на дві великі групи [1]. Першу групу складають методи, що дозволяють визначити орієнтацію КА на основі інформації про певні опорні напрямки в просторі. При цьому інформація, отримана в попередні моменти часу, не використовується. До другої групи відносять рекурсивні алгоритми оцінювання, що використовують математичну модель руху об’єкта, а також враховують отриману раніше інформацію про орієнтацію.

В свою чергу методи визначення орієнтації, що відносять до першої групи, поділяють також на дві підгрупи. Першу складає алгоритм TRIAD та його модифікації. До другої відносять методи, що оцінюють матрицю орієнтації на основі критерію найменших квадратів.

Постановка задачі

Розглядається просторовий рух тіла, з яким зв’язана система координат (ЗСК) $OXYZ$, відносно опорної системи координат (ОСК) $OX_0Y_0Z_0$. При розгляді руху КА в якості ОСК в більшості випадків використовується орбітальна система координат. Припускається що, космічний апарат є стабілізованим в ОСК, тобто його кутові швидкості відносно цієї системи координат є малими. Послідовність поворотів від ОСК до ЗСК 3-2-1 на кути рискання, тангажу та крену відповідно.

Орієнтація КА визначається на основі інформації про два опорні напрямки у просторі. Розглядається випадок використання тільки двох вимірювань, оскільки він є досить поширеним, особливо для такого класу КА, як мікросупутники. Найбільш поширеним для мікросупутників є використання вектора напруженості магнітного поля Землі (МПЗ) та вектора напрямку на Сонце, які вимірюються відповідно магнітометрами та датчиками Сонця.

Позначимо через $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ вектори опорних напрямків в ОСК. Ці вектори визначаються на основі бортових моделей. Позначимо через $\vec{b}_1$ та $\vec{b}_2$ ті ж вектори в ЗСК. Ці вектори вимірюються приладами, встановленими на борту КА.

Задача полягає у комбінуванні декількох оцінок матриці орієнтації, отриманих за допомогою алгоритму TRIAD в декілька послідовних моментів часу, з метою покращення точності визначення кутового положення рухомого об'єкта.

Алгоритм TRIAD

Алгоритм TRIAD є найпростішим з відомих детермінованих методів визначення орієнтації [2]. У відповідності до нього в ОСК та ЗСК будуються трійки взаємно ортогональних одиничних векторів:

$$\vec{v}_1 = \vec{r}_1, \vec{v}_2 = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right|}, \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \tag{1}$$

$$\vec{w}_1 = \vec{b}_1, \vec{w}_2 = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}, \vec{w}_3 = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2. \tag{2}$$

На основі побудованих векторів складаються матриці M_0 та M :

$$M_0 = \left[\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3\right], \tag{3}$$

$$M = \left[\vec{w}_1 \mid \vec{w}_2 \mid \vec{w}_3\right]. \tag{4}$$

Оскільки складові матриць M_0 та M є взаємно ортогональними одиничними векторами, то ці матриці є ортогональними. Матриця орієнтації визначається зі співвідношення:

$$A = MM_0^{-1} = MM_0^T . \tag{5}$$

Слід зауважити, що в якості першого вектора трійки $\vec{b}_1$ (і $\vec{r}_1$ відповідно) бажано вибирати той вектор, який визначається в ЗСК більш точно. На основі матриці A можна визначити кути орієнтації КА для відомої послідовності поворотів.

Існує декілька різновидів алгоритму TRIAD, які відрізняються головним чином способом побудови трійки взаємно ортогональних векторів [3]. Однак загальною є ідея побудови цієї трійки на основі двох векторів.

Даний алгоритм є дуже простим в реалізації і швидким. Однак, він дозволяє використовувати інформацію лише про два опорні напрямки, що є суттєвим обмеженням. Крім того, покази двох приладів враховуються однаково, що у випадку використання двох вимірювачів з різною точністю призводить до погіршення точності оцінювання просторового положення.

Способи комбінування декількох оцінок матриці орієнтації

Задача оцінювання орієнтації з використанням критерію найменших квадратів була запропоновано у роботі [4]. Ця задача оцінювання відома як задача Вахба. Вона полягає у визначенні ортогональної матриці з детермінантом +1, яка б мінімізувала функцію втрат

$$L\left(\hat{A}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\left\|\vec{b}_i-\hat{A}\vec{r}_i\right\|^2, \tag{6}$$

де a_i - набір додатних вагових коефіцієнтів, пов’язаних з кожним вимірюванням; символом $\| \; \|$ позначено евклідову норму вектора, а символом ^ - оцінку відповідної величини.

Як бачимо, використання критерію (6) дозволяє враховувати в оцінці матриці орієнтації довільну кількість опорних напрямків. Крім того, вимірювання, отримані різними приладами, враховуються по-різному, завдяки коефіцієнту a_i. Більшість існуючих методів тим чи іншим шляхом розв’язують задачу Вахба, тобто оцінюють матрицю A [5].

В роботі [6] показана можливість використання критерію найменших квадратів для комбінування декількох оцінок матриці орієнтації, що отримуються за допомогою TRIAD в послідовні моменти часу за умови, що кутові швидкості руху тіла є малими. Для цього матрицю A отримують з умови мінімізації наступного виразу:

$$L(\hat{A})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|M_i-\hat{A}M_{0i}\right\|^2, \tag{7}$$

де матриці M_i та M_{0i} визначаються за формулами (3) та (4). Індекс i можна трактувати як позначення для різних моментів часу, або як позначення для різних пар векторів, для яких обчислюється вказані матриці.

Оцінка для матриці орієнтації, що мінімізує (6) визначається так:

$$\hat{A}=S^T\left(\sqrt{SS^T}\right)^{-1}, \tag{8}$$

де

$$S=\sum M_{0i}M_i^T. \tag{9}$$

Підсумовування у виразі для S може виконуватися як за декількома вимірювачами, так і за послідовними моментами часу. В другому випадку, коли є доступними тільки два опорні вектори, отримані в декілька послідовних моментів часу, можна зменшити вплив випадкових похибок вимірювачів на точність визначення орієнтації.

Проаналізуємо цей випадок, розглядаючи КА, стабілізований за трьома осями відносно ОСК. Це дозволяє зробити припущення, що орієнтація КА не змінюється протягом невеликого проміжку часу. Тобто вектори в ОСК, отримані в декількох точках орбіти на короткому проміжку часу, будуть практично однаковими. Аналогічно, вектори, що вимірюються в декількох точках, будуть практично однаковими, але будуть мати різні складові від шуму. Підсумовування (9) та використання співвідношення (8) дає змогу зменшити вплив шуму у вимірюваннях на точність визначення орієнтації за алгоритмом TRIAD.

Орієнтація тіла за вказаного припущення також може бути визначена за допомогою осереднення кількох оцінок матриці орієнтації, отриманих в послідовні моменти часу,

$$\hat{A} = \frac{1}{N}\left(\sum_i \hat{A}_i\right) \qquad (10)$$

Підсумовування в формулах (8) та (9) може проводитися за допомогою так званої ковзної суми. Використання такої суми дозволяє отримувати інформацію про орієнтацію КА на кожному кроці роботи системи керування, в той час як використання звичайного підсумовування дозволяє отримати результат після накопичення необхідної кількості вимірювань.

Моделювання

З метою тестування розглянутих методів було проведене оцінювання матриці орієнтації для випадку програмного руху, тобто випадку, коли кути орієнтації змінюються за певним законом. Прийнято, що

$$\psi(t) = 10°\sin(0{,}0021t + 60°),\ \vartheta(t) = -3{,}5°\cos(0{,}0021t),$$
$$\varphi(t) = 5°\sin(0{,}0021t). \qquad (11)$$

Час моделювання дорівнює $t = \frac{T}{4}$, де $T = \frac{2\pi}{0{,}002}$. Час між відліками оцінювання матриці орієнтації дорівнює 1 с.

Вектори в ОСК вважаються незмінними і рівними відповідно $\vec{r}_1 = [0,1,0]^T$ та $\vec{r}_2 = [0,0,1]^T$. Вектори в ЗСК моделюються у відповідності до моделі вимірювань, яка відома в літературі як модель вимірювань QUEST [7]. У відповідності з нею:

$$\tilde{\vec{b}}_i = A\vec{r}_i + \vec{v}_i, \qquad (12)$$

$$\vec{v}_i^T A\vec{r}_i = 0, \qquad (13)$$

де $\vec{v}_i$ - вектори похибок вимірювання i-го опорного напрямку, компоненти яких вважаються за величиною нормально розподіленими випадковими величинами.

Як видно з (13), вектори $\vec{v}_i$ знаходяться в площині, перпендикулярній істинному напрямку $A\vec{r}_i$. Вони вважаються рівномірно розподіленими за напрямком у цій площині. Вектори $\vec{v}_i$ мають такі властивості:

$$M[\vec{v}_i] = \vec{0}, \tag{14}$$

$$M\left[\vec{v}_i\vec{v}_i^T\right] = \sigma_i^2\left[I_{3\times3} - (A\vec{r}_i)(A\vec{r}_i)^T\right], \tag{15}$$

де $\vec{0}$ – нульовий вектор розмірності 1×3, σ_i – середнє квадратичне значення норми вектора $\vec{v}_i$.

Таким чином модель вимірювань, що описується виразами (12)-(15), визначає конус, в якому можливе перебування вектору вимірювань $\tilde{\vec{b}}_i$.

Припускається, що перший вектор вимірюється більш точно, ніж другий, тобто середні квадратичні значення норм векторів $\vec{v}_i$ дорівнюють відповідно $\sigma_{v1} = 0.0051$рад ($\approx 0{,}3°$), а $\sigma_{v2} = 0.0175$рад ($\approx 1°$). Матриця орієнтації оцінюється за допомогою класичного алгоритму TRIAD (5) для кожного моменту часу та за допомогою співвідношень (8) і (10) на основі N вимірювань.

Результати моделювання представлено на рис. 1. Як бачимо, використання для оцінки матриці орієнтації виразу (8) дає можливість зменшити вплив випадкових похибок вимірювань опорних напрямків на точність визначення матриці орієнтації, і відповідно кутів орієнтації.

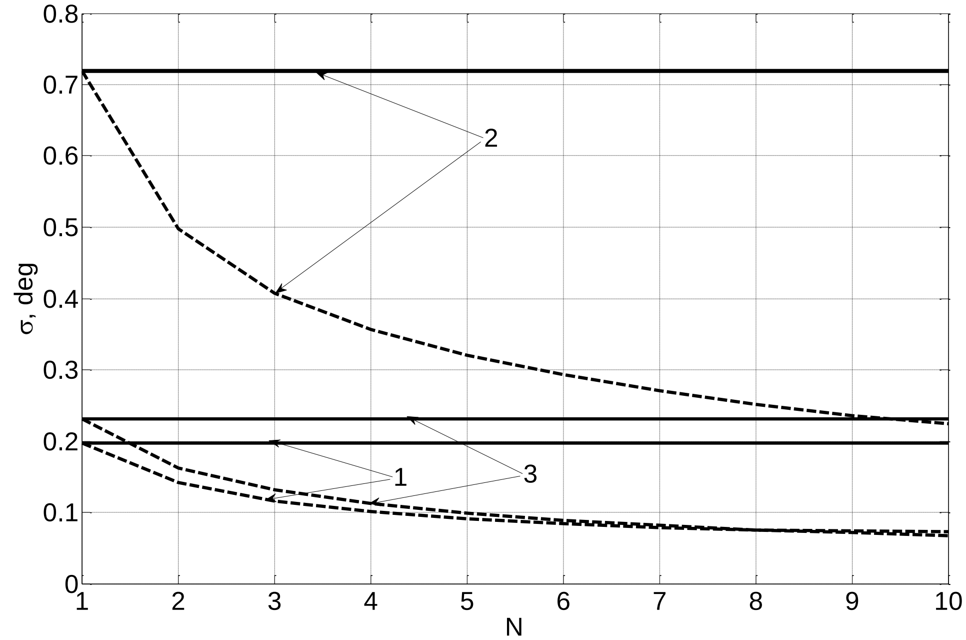

Рис. 1. Зміна с.к.в. похибок оцінювання кутів орієнтації, отриманих за допомогою TRIAD (точкова крива) та при комбінування N оцінок за (8) з ковзною сумою(суцільна крива)(1 – для кута

рискання, 2 – для кута тангажу, 3 – для кута крену)

Слід відзначити, що результати оцінювання орієнтації за формулами (8) та (10) дають однаковий результат. Цей висновок є прогнозованим, оскільки, величина, що оцінюється (матриця орієнтації), є за припущенням незмінною величиною. Оцінювання незмінної величини за допомогою методу найменших квадратів еквівалентне простому осередненню значень такої величини.

За припущенням, орієнтація МС не змінюється за час накопичення оцінок матриці орієнтації. Однак, якщо кількість оцінок є досить великою, то виникає похибка, спричинена обертанням за цей час (рис. 2). При великій кількості N у виразах (9) або (10) підвищення точності орієнтації за рахунок комбінування декількох оцінок матриці орієнтації може бути знівельовано похибкою від обертання, тобто зміною оцінюваної величини. Вказана похибка також зростає при збільшенні кутової швидкості обертання КА. При зменшенні часу між відліками вона зменшується.

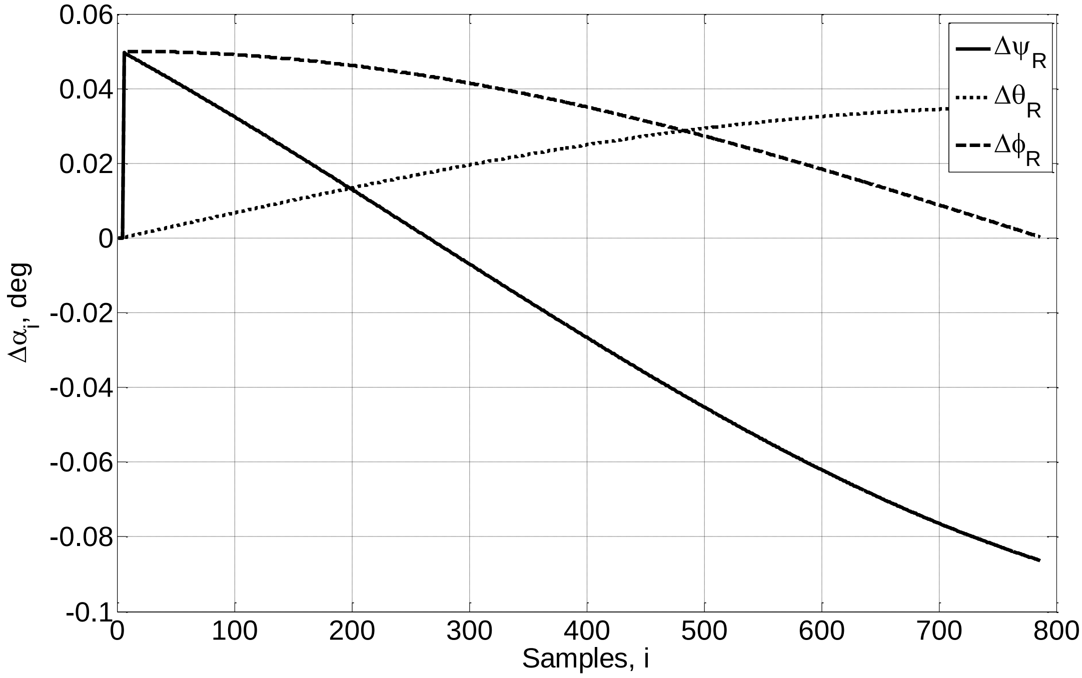

Рис. 2. Зміна кутів орієнтації за час накопичення оцінок матриці орієнтації для $N=5$

Висновки

Розглянуто два способи комбінування декількох оцінок матриці орієнтації, отриманих за допомогою алгоритму TRIAD: використання критерію найменших квадратів для оцінки матриці орієнтації та осереднення. За даних умов задачі, тобто коли кутові швидкості супутника є малими, і відповідно орієнтацію КА на певному проміжку часу можна вважати незмінною, ці два способи дають однаковий результат. При великій кількості оцінок матриці орієнтації, що використовуються у вказаних методах, може значно впливати похибка, викликана обертанням супутника за час накопичення оцінок. Ця похибка зменшується при зменшенні кількості оцінок, а також при зменшенні часу між відліками.

Список використаних джерел

1. *Marques S., Clements R., Lima P.* Comparison of Small Satellite Attitude Determination Methods//2000 AIAA Conference on Navigation, Guidance and Control, 14-17 August 2000, Colorado, USA. Proceedings. –P.68–77.
2. *Shuster M. D., Oh S. D*. Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations// Journal of Guidance and Control. –1981. – Vol. 4, № 1. – P. 70–77.
3. *Tanygin, S., Shuster, M. D.* The Many TRIAD Algorithms// Paper AAS-07-104, AAS / AIAA Space Flight Mechanics, Meeting, Sedona, Arizona, January 28–February 22, 2007. Proceedings: Advances in the Astronautical Sciences.- 2007.- Vol. 127. – P. 81–99.
4. *Wahba G.,* Problem 65-1: A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude// Siam Review. – 1965. – Vol. 7, № 3. – P. 409.
5. *Markley, F. L., Mortari M.* Quaternion Attitude Estimation Using Vector Measurements// The Journal of the Astronautical Sciences. – 2000. – Vol. 48, № 2– 3.– P. 359–380.
6. *Ryzhkov L.M., Stepurenko D.I.* Least Squares Using to Improve the TRIAD Algorithm// 2-nd International Conference "Methods and Systems of Navigation and Motion Control". Proceedings. – К.: Освіта України, 2012. – P. 106-108.
7. *Cheng Y., Shuster M.D.* QUEST and The Anti-QUEST: Good and Evil Attitude Estimation// The Journal of the Astronautical Sciences. – 2005. – Vol. 53, № 3. – P. 337–351.