УДК.539.3

С. И. Трубачев, О. Н. Алексейчук, В. О. Петрик

УЧЕТ НЕСОВЕРШЕННОЙ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

В настоящее время исследование напряженно-деформированного состояния механических систем под воздействием вибрационных загрузок является актуальной задачей . Решение данной задачи для сложных конструкций авиастроения, судостроения и строительства невозможно без применения численных методов расчета. Большой интерес при исследовании динамического поведения механических систем представляют резонансные колебания с учетом несовершенной упругости реального материала.

Постановка и решение задачи

Линеаризованное уравнение гистерезисного тела при простом циклическом деформировании имеет вид [1]:

$$\sigma_{ij} = 3K \cdot (1+\beta_1 I) \cdot \varepsilon\delta_{ij} + 2G \cdot (1+\delta_1 I) \cdot (\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}), \qquad (1)$$

где упругие и гистерезисные постоянные связаны соответственно соотношениями:

$$K = \frac{E}{3\cdot(1-2\mu)}; \quad G = \frac{E}{2\cdot(1+\mu)}; \quad \mu = \frac{3K-2G}{3\cdot(3K+G)} \qquad (2)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\beta_1\cdot(1-2\mu) + 2\cdot\delta_1\cdot(1+\mu)\right) \qquad (3)$$

здесь β_1, δ_1 – коэффициенты гистерезисных отклонений в зависимостях между шаровыми и девиаторными тензорами; α_1 – коэффициент гистерезисного отклонения от закона Гука при циклическом одноосном растяжении-сжатии; $K; E; G$ – объемный модуль упругости, модули упругости первого и второго рода; μ - коэффициент Пуассона;

$\varepsilon = \frac{1}{3}\cdot(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$; $\delta_{i,j}$ – символы Кронекера; I – оператор сдвига фазы гистерезисного отклонения на $\frac{1}{2}\pi$; $i, j = 1,2,3$.

В святи с тем, что при резонансе устанавливаются одночастотные колебания (главные колебания), то можно считать деформирование гармоническим

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}\cdot\cos pt = \varepsilon_{ij}\cdot\cos\psi \qquad (4)$$

Тогда в уравнениях (1) роль оператора сдвига формально будет выполнять выражение

$$I = \mathrm{tg}\psi \qquad (5)$$

Если колебания происходят вдали от резонанса, то динамическая задача будет отличаться от статической только наличием сил инерции. Закон деформирования может быть любым и, следовательно , никаких ограничений не накладывается условием (4).

Как и в теории вязкоупругого тела [2] используем принцип соответствия, согласно которому соотношения между постоянными, а также уравнения будут иметь такой же вид, как и в теории упругости, если под постоянными понимать операторы:

$$\bar{K} = K\cdot(1+\beta_1 I); \quad \bar{G} = G\cdot(1+\delta_1 I). \qquad (6)$$

Тогда согласно принципу соответствия равенства(1), (2), (3) примут вид:

$$\sigma_{ij} = 3\bar{K}\cdot\varepsilon\delta_{ij} + 2\bar{G}\cdot(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}); \qquad \bar{\mu} = \frac{3\bar{K} - 2G}{3\cdot(3\bar{K} + G)}; \tag{7}$$

$$\bar{K} = \frac{\bar{E}}{3\cdot(1-2\bar{\mu})}, \qquad G = \frac{\bar{E}}{2\cdot(1+\bar{\mu})}. \tag{8}$$

В развернутом виде уравнения (7) представим как

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{2\bar{G}\cdot(1-\bar{\mu})}{1-2\bar{\mu}}\cdot\left[\varepsilon_{11} + \bar{\mu}\frac{\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{1-\bar{\mu}}\right],\\
\sigma_{22} &= \frac{2\bar{G}\cdot(1-\bar{\mu})}{1-2\bar{\mu}}\cdot\left[\varepsilon_{22} + \bar{\mu}\frac{\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}}{1-\bar{\mu}}\right],\\
\sigma_{33} &= \frac{2\bar{G}\cdot(1-\bar{\mu})}{1-2\bar{\mu}}\cdot\left[\varepsilon_{33} + \bar{\mu}\frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{1-\bar{\mu}}\right].
\end{aligned} \tag{9}$$

Разложим входящие операторы в выражении (9) в ряд Маклорена и ограничимся двумя первыми членами ряда:

$$\bar{\mu} = \mu + (1+\mu)\cdot(1+2\mu)\cdot\frac{(\beta_1 I - \delta_1 I)}{3} \tag{10}$$

$$\frac{1}{1-2\bar{\mu}} = \frac{1}{1-2\mu}\left[1 + \frac{2\cdot(1+\mu)\cdot(\beta_1 I - \delta_1 I)}{3}\right] \tag{11}$$

$$\frac{\bar{\mu}}{1-2\bar{\mu}} = \frac{1}{1-2\mu}\left[1 + \frac{(1+\mu)\cdot(\beta_1 I - \delta_1 I)}{3\mu}\right] \tag{12}$$

Подставляя выражения (10) – (12) в соотношение (9) ,учитывая формулу (2) и пренебрегая произведениями и квадратами малых величин, получим выражение для тензора напряжений линейно-гистерезисного тела:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = \frac{(1-\mu)\cdot E}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)}\cdot\Bigg[\varepsilon_{11} + \frac{\mu}{1-\mu}\cdot(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + \frac{(1+\mu)\cdot\beta_1\cdot I}{3\cdot(1-\mu)}\cdot(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\\
+\varepsilon_{33}) + \frac{(1-2\cdot\mu)\cdot\delta_1\cdot I}{3\cdot(1-\mu)}\cdot(2\cdot\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})\Bigg]
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\sigma_{22}=\frac{(1-\mu)\cdot E}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)}\cdot\left[\varepsilon_{22}+\frac{\mu}{1-\mu}\cdot(\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11})+\frac{(1+\mu)\beta_1\cdot I}{3\cdot(1-\mu)}\cdot(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\right.$$
$$\left.+\varepsilon_{33})+\frac{(1-2\cdot\mu)\cdot\delta_1\cdot I}{3\cdot(1-\mu)}\cdot(2\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11})\right]$$

$$\sigma_{33}=\frac{(1-\mu)\cdot E}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)}\cdot\left[\varepsilon_{33}+\frac{\mu}{1-\mu}\cdot(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\frac{(1+\mu)\cdot\beta_1\cdot I}{3\cdot(1-\mu)}\cdot(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\right.$$
$$\left.+\varepsilon_{33})+\frac{(1-2\cdot\mu)\cdot\delta_1\cdot I}{3\cdot(1-\mu)}\cdot(2\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\right]$$

$$\sigma_{12}=\frac{E\cdot(1+\delta_1\cdot I)}{1+\mu}\cdot\varepsilon_{12};\ \sigma_{23}=\frac{E\cdot(1+\delta_1\cdot I)}{1+\mu}\cdot\varepsilon_{23};\ \sigma_{31}=\frac{E\cdot(1+\delta_1\cdot I)}{1+\mu}\cdot\varepsilon_{31}$$

Уравнение (13) можно записать в матричном виде:

$$\{\sigma\}=[E]\cdot\{\varepsilon\}+\left[E^*\right]\cdot I\cdot\{\varepsilon\}, \tag{14}$$

здесь $\{\sigma\},\{\varepsilon\}$ – векторы-столбцы напряжений и деформаций; где $[E]$ и $[E^*]$ – квадратные матрицы соответственно упругих и гистерезисных постоянных [3].

При равенстве $\beta_1=\delta_1$, получаем:

$$\left[E^*\right]=\delta_1\cdot[E]. \tag{15}$$

Если рассматривать традиционный алгоритм метода конечных элементов (МКЭ), матрицы жесткости и гистерезисного демпфирования для объемного конечного элемента можно найти как:

$$\begin{gathered}[K]=\int_V [D]^T\cdot[E]\cdot[D]dv\\ \left[K^*\right]=\int_V [D]^T\cdot\left[E^*\right]\cdot[D]dv\end{gathered} \tag{16}$$

где $[D]$ - матрица зависимости между деформациями и узловыми перемещениями конечного элемента.

В случае, если справедливо условие (15), матрица демпфирования будет пропорциональна матрице жесткости

$$\left[K^*\right]=\delta_1\cdot[K] \tag{17}$$

Используя выражения (14) - (17), можно решить задачу о резонансных колебаниях механических систем с учетом несовершенной упругости материала.

Следует отметить, что основная трудность при решении задач вибропрочности механических систем заключается в нахождении спектра собственных частот и форм колебаний.

При решении реальных практических задач матрицы масс и жесткостей получаются больших размерностей, что приводит к трудностям вычислительного характера. Это связано с тем, что при исследовании конструкций сложной конфигурации необходима достаточно мелкая дискретизация, что увеличивает порядок матриц. Для решения задач динамики целесообразно применять альтернативный подход, основанный на минимизации соответствующего функционала методом покоординатного спуска [3].

При использовании метода покоординатного спуска нет необходимости в формировании, хранении и оперировании с глобальными матрицами масс и жесткостей, что позволяет решать реально практические задачи большой размерности.

Выводы

1. В работе приведены в аналитическом виде матрицы демпфирования при резонансных колебаниях механических систем.

2. Представлены уравнения для компонент тензора напряжений с учетом несовершенной упругости материала при простом циклическом деформировании.

3. Даны рекомендации использования полученных матриц демпфирования при решении практических задач численными методами.

Список использованной литературы

1. *Василенко М. В.* Теорія коливань і стійкості руху // М. В. Василенко, О. М. Алексейчук/ К.: Вища школа, 2004.- 575с.
2. *Мейз Д.* Теория и задачи механики сплошных сред // Д. Мейз/- М.: Наука, 1994,-350с.
3. *Бабенко А. Е.* Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированного состояния при статических и вибрационных загрузках // А. Е. Бабенко, Н. И. Бобырь, С. Л. Бойко, О. А. Боронко / К.: Инрес, 2005. – 264 с.