УДК 681.3

*DOI*: http://dx.doi.org/10.20535/2219-3804192018162296

**О. В. Козир**[1], *асистент*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕРМОПАР

**En** The article consists of methods for obtaining transient equations of a thermocouple model, which is described by a linear differential equation of the first order, with known input temperature signals. The equation for the thermocouple transient response is obtained for various initial conditions and input signal delay. The thermocouple reaction equation for a linearly increasing input signal is obtained. Also, the thermocouple reaction equations for input signals are obtained, which differ from the standard ones.

The obtaining of dynamic models of thermocouples on the basis of an analytical solution of the equations of heat exchange processes is associated with significant difficulties in solving systems of partial differential equations. Therefore, in practice, the dynamic model of thermocouples is determined by experimental methods for the identification of dynamic characteristics. From the point of view of practical implementation it is expedient to carry out the identification of the thermocouple by its reaction to the input signal in the form of a step temperature change.

These equations are used to compensate thermal inertia of the thermocouple while restoring the actual temperature from thermo-EMF of the thermocouple. The equation for the thermocouple reaction to an arbitrary waveform is obtained.

**Ru** В статье рассмотрены методы получения уравнений переходных процессов модели термопары, которая описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, при известных законах изменения входного температурного сигнала. Получено уравнение переходной характеристики термопары при различных начальных условиях и задержке входного сигнала. Получено уравнение реакции термопары на линейно растущий входной сигнал. Также, получены уравнения реакции термопары на входные сигналы, которые отличаются от стандартных. Данные уравнения позволяют компенсировать тепловую инерционность термопары при восстановлении действительной температуры по значениям термо-ЭДС термопары. Получено уравнение реакции термопары на входной сигнал произвольной формы.

[1] *НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», кафедра автоматизації експериментальних досліджень*

## Вступ

Відновити значення температури на основі аналізу термо-ЕРС термопари, при динамічних вимірюваннях, можливо за умови, що відома мАтематична модель термопари. Отримати цю модель можна виконавши теоретичний вивід рівняння теплообмінних процесів на основі фундаментальних законів термодинаміки, або на основі експериментальних даних, отриманих при випробуванні термопари. Останній підхід є найбільш поширеним. Суть його полягає в апроксимації моделлю експериментально отриманої реакції термопари на змінний температурний сигнал відомої форми.

## Аналіз проблеми

Отримання динамічних моделей термопар на основі аналітичного рішення рівнянь теплообмінних процесів пов’язано із значними складнос--тями у рішенні систем диференціальних рівнянь у частинних похідних [1]. Тому, на практиці, динамічну модель термопари визначають експериментальними методами ідентифікації динамічних характеристик [2]. З точки зору практичної реалізації доцільно виконати ідентифікацію термопари за її реакцією на вхідний сигнал у вигляді ступінчастої зміни температури. Реакція термопари на вхідну ступінчасту зміну температури називається перехідною характеристикою термопари [3]. Реалізація інших елементарних сигналів, які використовуються при ідентифікації динамічних характеристик (дельта імпульс, сигнал гармонічної форми тощо) мають значні недоліки в порівнянні з ступінчастою функцією. Ці недоліки пов’язані з реалізацією відповідного закону зміни температури на вході термопари для отримання відповідної реакції на цю зміну [4]. Актуальним завдання постає дослідження реакції термопари на вхідний температурний сигнал, який відрізняється від стандартного та отримання відповідних моделей перехідних процесів термопари.

## Постановка задачі

Метою статті є дослідження перехідних процесів термопари та отримання математичних моделей термопари у залежності від форми вхідного температурного сигналу.

## Вивід математичної моделі термопари

Модель термопари вибирається на основі рівнянь, які найбільш точно відображають характер роботи термопари у перехідному режимі [5]. Термопару наближено можна представити лінійною стаціонарною системою із зосередженими параметрами. Перехідні процеси у такій системі описуються лінійним диференційним рівнянням [6]:

$$a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) = b_m \frac{d^m \theta(t))}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{d\theta(t)}{dt} + b_0 \theta(t),$$

якому відповідає передавальна функція в операторній формі [6]:

$$W(p) = \frac{U(p)}{\Theta(p)} = \frac{b_m p^m + b_{(m-1)} p^{(m-1)} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{(n-1)} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0},$$

де $\theta(t)$, $\Theta(p)$ - температура вимірюваного середовища у часовій та комплексній області, відповідно; $u(t)$, $U(p)$ - термо-ЕРС термопари у часовій та комплексній області, відповідно; $p = \alpha + j\omega$ - комплексна змінна; $W(p)$ - передавальна функція термопари; $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ та $b_m, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ - постійні коефіцієнти, які повинні відповідати умовам стійкості системи $n \geqslant m$.

На практиці, динамічні властивості термопари описують лінійним диференційним рівнянням першого порядку (1).

$$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = K\theta(t), \quad u(t=0) = u_0. \tag{1}$$

де $u(t)$ – функція термо-ЕРС е часовій області, вихід термопари; $\theta(t)$ – вхідний температурний сигнал, у часовій області; $K$ — коефіцієнт перетворення температури у термо-ЕРС; $u_0$ – термо-ЕРС термопари, до початку зміни температури, за $t<0$; $\tau$ – постійна часу термопари, яка і визначає її динамічні властивості. Постійна часу характеризує час який потрібен, щоб значення термо-ЕРС на виході термопари становило 63,2 % від усталеного, коли термопара буде перебувати в термодинамічній рівновазі із об’єктом вимірювання.

Постійну часу можна визначити експериментальним шляхом із реакції термопари на ступінчасту зміну температури (рис. 1), або можна використати лінійну зміну температури і постійна часу буде дорівнювати часу затримки відгуку термопари (рис. 2).

**Рівняння перехідної характеристики термопари**

Під час ідентифікації термопар найчастіше користуються методом визначення перехідної характеристики термопари (рис. 1). Тобто, у початковий момент часу, коли $t = 0$, температура об’єкту вимірювання миттєво змінюється від значення $\theta_1$ до $\theta_2$ і так залишається незмінною нескінченно довго:

$$\theta(t) = \begin{Bmatrix} \theta_{1,} t < 0 \\ \theta_{2,} t > 0 \end{Bmatrix}.$$

У загальному випадку, за $\theta_1 = 0$ та $\theta_2 = 1$, вхідна дія має форму одиничної функції (рис. 1):

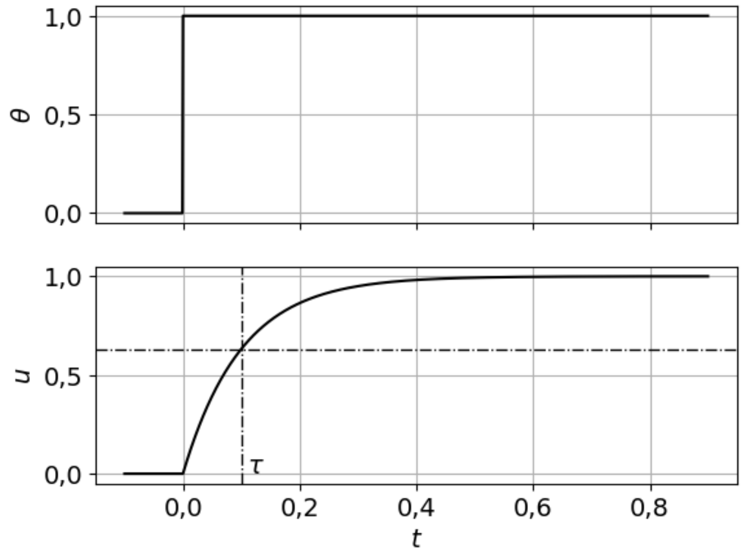



Рис. 1. Реакція термопари на ступінчасту зміну температури

$$\theta(t) = \sigma(t) = \begin{Bmatrix} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{Bmatrix}.$$

Рівняння термопари (1) має наступний вигляд:

$$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = K\sigma(t), \quad u(t=0) = u_9 = 0. \qquad (2)$$

Рішення даного рівняння знайдено за допомогою перетворення Лапласа. Розраховані зображення членів рівняння (2):

$$u(t) \to U(p), \qquad \theta(t) \to \Theta(P),$$

$$\frac{du(t)}{dt} \to pU(p) - u(0), \qquad \sigma(t) \to \frac{1}{p}.$$

Загальний вираз рівняння (2) у операторній формі має наступний вигляд:

$$\tau\left(pU(p) - u(0)\right) + U(p) = \frac{K}{p}.$$

Оскільки $u(0) = 0$, то отримали наступне рівняння:

$$\tau pU(p) + U(p) = \frac{K}{p}.$$

Вирішивши дане рівняння відносно $U(p)$ отримаємо:

$$U(p) = \frac{K}{p}\frac{1}{\tau p + 1}.$$

Для переходу до області оригіналів виконано наступні перетворення. Представлено праву частину у вигляді суми елементарних дробів використавши метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{K}{p}\frac{1}{\tau p+1}=\frac{A}{p}+\frac{B}{\tau p+1}.$$

Звівши праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{A}{p}+\frac{B}{\tau p+1}=\frac{A(\tau p+1)+Bp}{p(\tau p+1)},$$

у результаті отримали рівність:

$$\frac{K}{p(\tau p+1)}=\frac{A(\tau p+1)+Bp}{p(\tau p+1)}.$$

Із цього рівняння отримали рівність чисельників:

$$A(\tau p+1)+Bp=K.$$

Записавши дане рівняння у загальної формі:

$$(A\tau+B)\,p+A=0p+K\ ,$$

склали систему рівнянь:

$$\begin{cases} A\tau+B=0 \\ A=K \end{cases}.$$

Після вирішення відносно $A$ і $B$ отримаємо:

$$\begin{cases} A=K \\ B=-K\tau \end{cases}.$$

Остаточний вигляд рівняння термо-ЕРС в операторній формі:

$$U(p)=\frac{K}{p}-\frac{K\tau}{\tau p+1}.$$

Застосувавши зворотне перетворення Лапласа отримали рівняння термо-ЕРС у часовій області. Для цього перетворили доданки у правій частині рівняння:

$$U(p)=K\frac{1}{p}-K\frac{1}{p-\left(\frac{-1}{\tau}\right)}.$$

Виконавши почленне зворотне перетворення, отримали:

$$u(t)=K-Ke^{\frac{-t}{\tau}}\ ,$$

або звівши подібні отримали рівняння реакції термопари на ступінчасту зміну температури:

$$u(t)=K\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right).$$

Графік даної функції зображено на рис. 1.

Для простоти розрахунку було прийнято, що температура змінювалась від нуля до певного значення. Якщо ж температура мала певне постійне значення до зміни, то відповідно на виході термопари існувало певне значення термо-ЕРС $u_0$. Врахувавши це припущення у результаті отримали рівняння перехідної характеристики термопари:

$$u(t)=K\left(1-\left(\frac{u_0-K}{K}\right)e^{\frac{-t}{\tau}}\right).$$

**Рівняння реакції термопари на лінійно зростаючий вхідний сигнал**

Як зазначалось, іншим методом визначення постійної часу є використання вхідного сигналу температури, який лінійно наростає від нуля до нескінченності $\theta(t)=t$. Нехай температура наростає пропорційно до часу. Прийнявши для простоти $u_0=0$, отримали диференційне рівняння наступного виду:

$$\tau\frac{du(t)}{dt}+u(t)=Kt.$$

Застосувавши перетворення Лапласа:

$$\tau\left(pU(p)-u(0)\right)+U(p)=\frac{K}{p^2}.$$

Виконавши викладені вище перетворення, отримали рівняння термо-ЕРС у операторній формі:

$$U(p)=\frac{K}{p^2(\tau p+1)}.$$

Розклавши праву частину рівняння на прості дроби:

$$U(p)=\frac{-K\tau}{p}+\frac{K}{p^2}+\frac{K\tau^2}{\tau p+1}.$$

та виконавши зворотне перетворення Лапласа отримали:

$$u(t)=-K\tau+kt+K\tau e^{\frac{-t}{\tau}}.$$

Звівши подібні отримали рівняння термопари у разі зміни температури термопари за лінійним законом:

$$u(t)=K\left(t+\tau\left(e^{\frac{-t}{\tau}}-1\right)\right).$$

Також, отримано рівняння термо-ЕРС для лінійного вхідного температурного сигналу із урахуванням, що $u_0\neq 0$.

$$u(t)=K\left(t+\tau\left(e^{\frac{-t}{\tau}}-1\right)+\frac{u_0}{K}e^{\frac{-t}{\tau}}\right).$$

На рис. 2 зображено графік залежності дійсної та виміряної температури від часу. Як бачимо, часове запізнення значень термопари після виходу на усталений режим дорівнює постійній часу термопари. А похибка вимірювання температури дорівнює $\Delta\theta$. Із рис. 2 видно, що похибка вимірювання температури пропорційна до постійної часу термопари. Тому, дуже важливим є ідентифікація термопар під час вимірювання температури коротких температурних імпульсів для отримання точних результатів вимірювання.

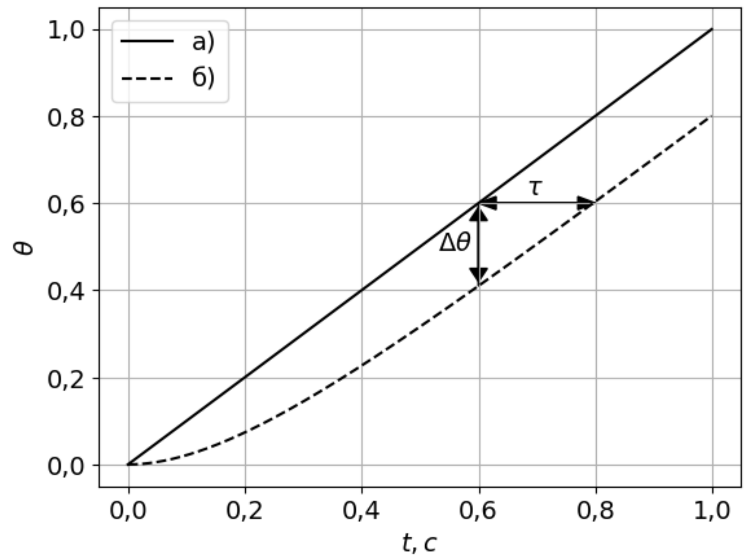



Рис. 2. Графік залежності дійсної а) та виміряної б) температури, у відносних одиницях, від часу. $\tau$ – постійна часу термопари; $\Delta\theta$ – похибка вимірювання температури в усталеному режимі

**Рівняння реакції термопари на вхідний сигнал довільної форми**

Загальне рівняння термо-ЕРС за довільної форми вхідного сигналу температури у операторній формі, за нульових початкових умов, $u_0 = 0$, отримано на основі рівняння (1):

$$\tau\left(pU(p) - u(0)\right) + U(p) = K\theta(p).\, u_0 \neq 0$$

Виконавши перетворення, отримали рівняння залежності термо-ЕРС від температури (2).

$$U(p) = \Theta(p)\frac{K}{\tau p + 1}. \tag{2}$$

Добутку образів відповідає згортка оригіналів [7]:

$$F_1(p)F_2(p) \to \int_0^t f_1(m)\, f_2(t-m)\, dm.$$

Загальне рівняння залежності термо-ЕРС термопари від температури для рівняння (1) має наступний вигляд:

$$u(t)=\frac{K}{\tau}\int_0^t \theta(m)e^{\frac{-t+m}{\tau}}dm .$$

Вираз $\frac{K}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$ – імпульсна характеристика системи першого порядку. Тому дане рівняння можна привести до виду, яке описує реакцію лінійної системи у теорії сигналів:

$$u(t)=\int_0^t \theta(m)h(t-m)dm,$$

де $h$ — імпульсна характеристики термопари.

Для випадку, коли $\theta(t)=sin(2\pi ft)\sigma(t)\,u_0\neq 0$ рівняння перетворення термопари, в операторній формі:

$$E(p)=\Theta(p)\frac{K}{\tau p+1}+\frac{\tau u_0}{\tau p+1}.$$

Виконавши, по членне, зворотне перетворення Лапласа отримано рівняння перетворення термопари:

$$u(t)=\frac{K}{\tau}\int_0^t \theta(m)e^{\frac{-t+m}{\tau}}dm+u_0(t)e^{\frac{-t}{\tau}}.$$

Отримано рівняння реакції термопари на зміну температури середовища за відомими простими законами за початкових нульових умов $(u(0)=0)$. За основу для розрахунків взято рівняння (2). Для того щоб отримати значення температури за значенням термо-ЕРС у першому наближенні використали коефіцієнт $K^{-1}$. Відповідно, на основі моделі термопари $u(t)$ отримують оцінку значення температури $\theta_m$ за допомогою наступного рівняння:

$$\theta_m(t)=K^{-1}u(t).$$

Закон зміни температури середовища має форму функції Хевісайда із запізненням:

$$\theta(t)=\sigma(t-t_0).$$

В операторній формі:

$$\Theta(p)=\frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Реакція термопари на вхідну дію в операторній формі:

$$U(p)=\frac{Ke^{-pt_0}}{p(\tau p+1)}.$$

Привівши дане рівняння, для зручності застосування зворотного перетворення Лапласа, до виду:

$$U(p) = K\frac{e^{-pt_0}}{p} - K\tau\frac{e^{-pt_0}}{\tau p+1},$$

отримали рівняння реакції термопари на зміну температури за функцією Хевісайда із запізненням:

$$u(t) = K\left(1 - e^{\frac{-t-t_0}{\tau}}\right)\sigma(t - t_0). \tag{3}$$

На рис. 3 зображено графік зміни вхідного сигналу температури у часі $\theta_r$ та графік температури $\theta_m$, яка отримана на основі моделі термопари (3).

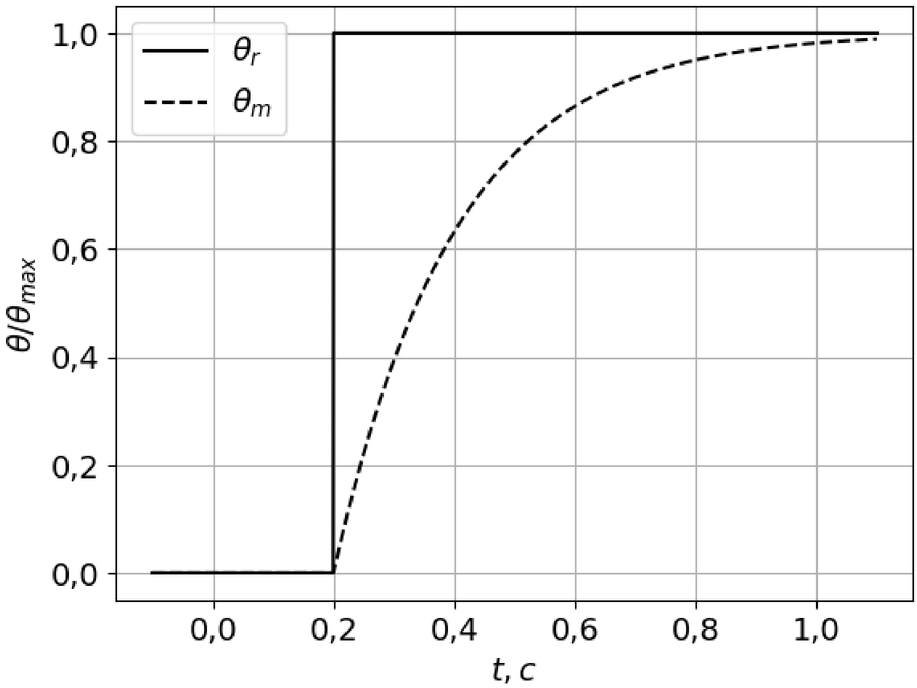



Рис. 3. Графіки зміни у часі температур вхідного сигналу

Закон зміни температури середовища за кусково-лінійною закономірністю у наступній формі:

$$\theta(t) = \left\{\begin{matrix} 0, t \le 0 \\ t, t > 0 \wedge t < t_0 \\ \theta_{0,} t \ge t_0 \end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Тобто, $\theta(t)$ є кусковою функцією, яка змінюється за різними законами на різних проміжках часу. Для аналітичного представлення даної залежності у практично придатній формі використаємо одиничну функцію Хевісайда та властивість запізнення операторного методу. Згідно із [7], будь-яку складну кускову функцію можна отримати за рахунок множення функції на відповідному відрізку часу на $\sigma(t - t_0)$ за різних значеннях запізнення $t_0$. Комбінуючи таким чином отриманні добутки отримують загальне рівняння на всій часовій осі.

Рівняння зміни температури у часі використовуючи функцію Хевісайда:

$$\theta(t)=\frac{\theta_0}{t_0}t\sigma(t)-\frac{\theta_0}{t_0}(t-t_0)\sigma(t-t_0).$$

Операторна форма цього рівняння:

$$\Theta(p)=\frac{\theta_0}{t_0}\frac{1}{p^2}-\frac{\theta_0}{t_0}\frac{1}{p^2}e^{-pt_0},$$

$$\Theta(p)=\frac{\theta_0}{t_0p^2}\left(1-e^{-pt_0}\right).$$

Реакція термопари на вхідну дію в операторній формі:

$$U(p)=\frac{\theta_0}{t_0p^2}\left(1-e^{-pt_0}\right)\frac{K}{\tau p+1}.$$

Дане рівняння, для зручності застосування зворотного перетворення Лапласа, представимо у вигляді:

$$U(p)=\frac{\theta_0K}{t_0}\left(1-e^{-pt_0}\right)\frac{1}{p^2(\tau p+1)},$$

та перетворивши множник $\frac{1}{p^2(\tau p+1)}$ на суму простих дробів:

$$U(p)=\frac{\theta_0K}{t_0}\left(1-e^{-pt_0}\right)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{\tau}{p}+\frac{\tau^2}{\tau p+1}\right),$$

отримаємо рівняння реакції термопари від зміни температури за функцією Хевісайда із запізненням:

$$u(t)=\frac{K\theta_0}{t_0}\left(t\sigma(t)-\tau\sigma(t)+\tau e^{\frac{-t}{\tau}}\sigma(t)-(t-t_0)\sigma(t-t_0)+\tau\sigma(t-t_0)-\tau e^{\frac{-t-t_0}{\tau}}\sigma(t-t_0)\right).$$

Звівши подібні

$$u(t)=\frac{K\theta_0}{t_0}\left(\left(t-\tau\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right)\sigma(t)-\left((t-t_0)-\tau\left(1-e^{\frac{-t-t_0}{\tau}}\right)\right)\sigma(t-t_0)\right),$$

остаточно отримаємо:

$$u(t)=\frac{K\theta_0}{t_0}\left((t-\tau)(\sigma(t)-\sigma(t-t_0))+\tau e^{\frac{-t}{\tau}}\left(\sigma(t)-e^{\frac{t_0}{\tau}}\sigma(t-t_0)\right)+t_0\sigma(t-t_0)\right).$$

На рис. 4 зображено графік зміни температури у часі $\theta_r$ за кусково-лінійним законом та графік $\theta_m$ реакції моделі термопари на цю зміну.

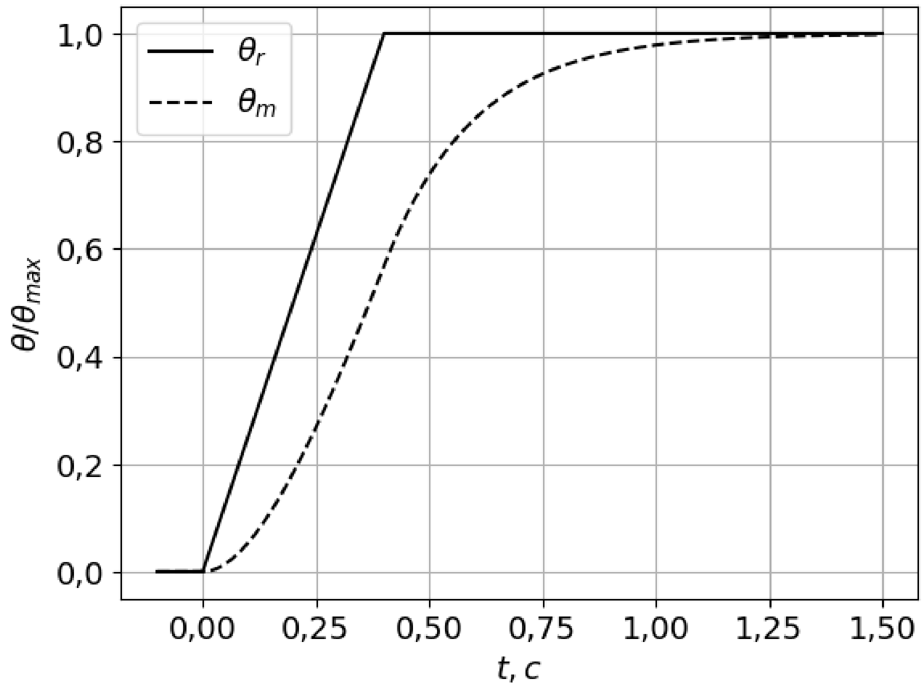



Рис. 4. Реакція моделі термопари першого порядку на зміну температури за кусково-лінійним законом (4)

**Графіки реакцій термопари на вхідні сигнали складної форми**

Температура середовища змінюється за наступним законом:

$$\theta(t) = \begin{Bmatrix} 0, t \le 0 \\ t^2, t > 0 \wedge t < t_0 \\ \theta_{0,} t \ge t_0 \end{Bmatrix}.$$

Рівняння зміни температури у часі на основі функції Хевісайда:

$$\theta(t) = \frac{\theta_0}{t_0^{\ 2}} t^2 \sigma(t) - \frac{\theta_0}{t_0^{\ 2}} \left(t^2 - t_0^{\ 2}\right) \sigma(t - t_0) \tag{5}$$

На рис. 5, *а* зображено графік зміни температури у часі $\theta_r$ за законом (5) та графік реакції моделі термопари першого порядку на цю зміну $\theta_m$.

Температура середовища змінюється за наступним законом:

$$\theta(t) = \begin{Bmatrix} 0, t \le 0 \\ \sqrt{t}, t > 0 \wedge t < t_0 \\ \theta_{0,} t \ge t_0 \end{Bmatrix}.$$

Рівняння зміни температури у часі використовуючи функцію Хевісайда:

$$\theta(t)=\frac{\theta_0}{\sqrt{t_0}}\sqrt{t}\sigma(t)-\frac{\theta_0}{\sqrt{t_0}}\left(\sqrt{t}-\sqrt{t_0}\right)\sigma(t-t_0) \tag{6}$$

На рис. 5, *б* зображено графік зміни температури у часі $\theta_r$ за законом (6) та графік реакції моделі термопари першого порядку на цю зміну $\theta_m$.

Температура середовища змінюється за наступним законом:

$$\theta(t)=\begin{Bmatrix} 0, t\le 0 \\ e^t-1, t>0 \wedge t<t_0 \\ \theta_{0,} t\ge t_0 \end{Bmatrix}.$$

Рівняння зміни температури в часі використовуючи функцію Хевісайда:

$$\theta(t)=\frac{\theta_0}{e^{t_0}-1}\left(\left(e^t-1\right)\sigma(t)-\left(e^t-e^{t_0}\right)\sigma(t-t_0)\right). \tag{7}$$

На рис. 5, *в*) зображено графік зміни температури у часі $\theta_r$ за кусково лінійним законом та графік реакції моделі термопари першого порядку на цю зміну $\theta_m$.

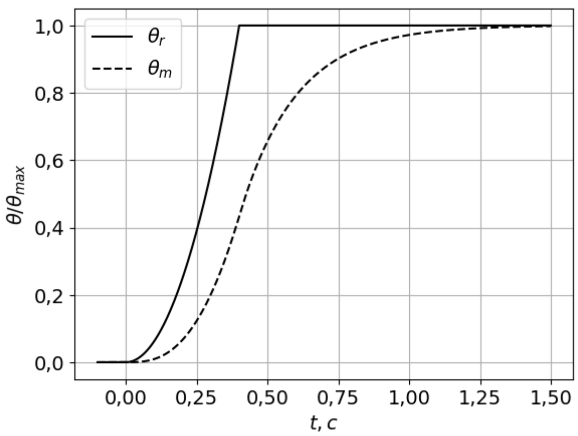
Температура середовища змінюється за наступним законом:

$$\theta(t)=\begin{Bmatrix} 0, t\le 0 \\ \sin(2\pi f t), t>0 \wedge t<t_0 \end{Bmatrix}.$$

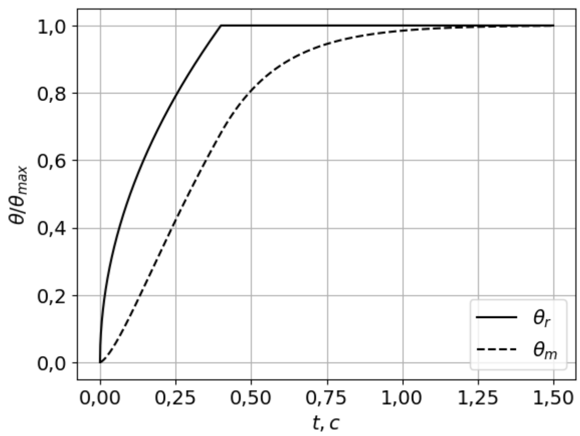
Рівняння зміни температури у часі використовуючи функцію Хевісайда:

$$\theta(t)=\sin(2\pi f t)\sigma(t). \tag{8}$$

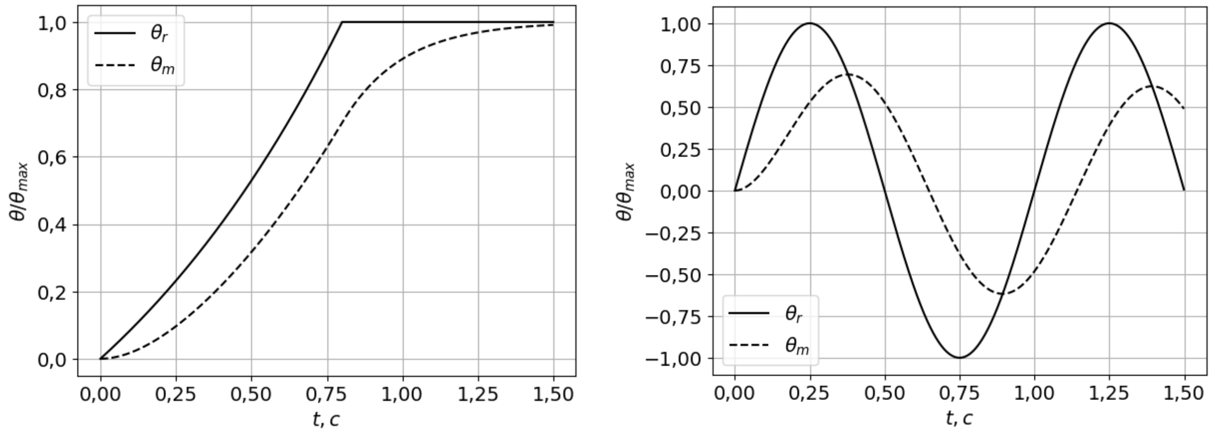
На рис. 5, *г*) зображено графік зміни температури у часі $\theta_r$ за законом (8) та графік реакції моделі термопари першого порядку на цю зміну $\theta_m$.




*а*)




*б*)




*в*) *г*)

Рис. 5. Реакція термопари на зміну температури за законом (5)

## Висновки

Були розраховані рівняння перехідних процесів термопари за вхідних сигналів різної форми. Отримано рівняння перехідної характеристики термопари за нульових початкових умовах, за умов відмінних від нульових та у разі затримки вхідного сигналу. Отримано рівняння реакції термопари на лінійно зростаючий вхідний сигнал. Данні рівняння дозволяють визначити сталу часу термопари за експериментальними даними для стандартних вхідних сигналів. Також, отримані рівняння реакції термопари на вхідні сигнали, які відрізняються від стандартних. Дані рівняння дозволяють компенсувати теплову інерційність термопари під час відновлення дійсної температури. Також, дані рівняння можна використати у разі ідентифікації динамічних характеристик термопари, коли вхідний сигнал відрізняється від стандартного.

## Список використаної літератури

1. Вимірювання температури: теорія та практика. / Я. Т. Луцик, О. П. Гук, О. І. Лах, Б. І. Стадник. – Львів: Видавництво «БескидБіт», 2006. – 560 с.
2. *Nicholas J. V.* Traceable temperatures. 2nd ed. / J. V. Nicholas, D. R. White. – John Wiley & Sons Ltd, 2001. – 441 p.
3. *Коротков П. А*. Динамические контактные измерения тепловых величин / П. А. Коротков, П. А. Лондон. – Л.: «Машиностроение», 1974. – 224 с.
4. *Козир О. В*. Відновлення форми температурного імпульсу за допомогою метод деконволюції/ О. В. Козир // Механіка гіроскопічних

систем. – 2017. – № 34. С. 89-97. DOI: https://doi.org/10.20535/0203-3771342017130269.
5. Козир О. В. Вимірювання нестаціонарної температури контактним методом / О.В. Козир // Інформаційні системи, механіка та керування. – 2017. – № 17. С. 134-143. DOI: https://doi.org/10.20535/2219-3804172017100686.
6. *Ярышев Н. А.* Теоретические основы измерения нестационарной температуры / Н. А. Ярышев. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 256 с. – (2-е изд., перераб.).
7. *Анго Андре*. Математика для электро- и радиоинженеров/ А. Анго. – М. : Издательство “Наука”, 1965. – 780 с.