УДК 539.595

*DOI*: http://dx.doi.org/10.20535/2219-3804192018161078

**О. С. Лимарченко[1],** *д.т.н., професор,* **В. В. Губська[2],** *к.ф.-м.н., старший викладач*

# ОСОБЛИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ ДЛЯ РЕЗЕРВУАРА ГИПЕРБОЛОЇДАЛЬНОЇ ФОРМИ

**En** The problem of the development of liquid parametric fluctuations with a free surface in a two-cavity hyperboloid tank moving vertically under the action of a force that varies according to a given harmonic law with the possibility of horizontal translational motion is considered in this paper. The behavior of the system is considered within the framework of a nonlinear multimode model of a joint reservoir and liquid movement.

An important class of problems is the generalization of the classical Faraday problem for a reservoir with liquid that carries the given motion in the vertical direction. Such a generalization is carried out in three directions: the movement of the system "reservoir - liquid" is carried out with the provision of additional degrees of freedom, e.g. the permissible movement of the system in the horizontal direction, or the angular movement of the reservoir; unlike the classical Faraday problem, the problem is considered in a joint statement; cases are considered not only cylindrical shape of the reservoir, but also other forms. Such generalizations correspond to the problems of longitudinal motion of aircraft, vessels, when there is no fixing of the structure of the reservoir with liquid, and the joint movement takes place.

The task is to investigate the behavior of the system "reservoir - liquid with a free surface" when harmonious excitement of motion by force applied to the reservoir. The behavior of the system is considered for the parametric resonance frequencies determined both on the basis of the classical parametric resonance of Faraday and on the basis of a generalized parametric resonance problem.

The results of numerical simulation indicate that significant demonstration of parametric resonance is observed on the fundamental frequency of joint oscillations. It is shown that the change of the frequency range of the parametric resonance is due to the compatibility of the system components motion, the oscillations are significantly increasing which requires modeling based on nonlinear algorithms.

**Ru** В работе рассматривается задача о развитии параметрических колебаний жидкости со свободной поверхностью в резервуаре в форме двуполостного гиперболоида в случае, когда резервуар движется вертикально под действием силы, которая меняется по заданному гармоническому закону с возможностью горизонтального поступательного движения. Поведение системы рассматривается в рамках нелинейной многомодовой модели

[1] *Київський національний університет ім. Тараса Шевченко, кафедра механіки суцільного середовища*
[2] *НТУУ «Київський національний університет ім. Ігоря Сікорського», кафедра динаміки і міцності машин та опору матеріалів*

совместного движения резервуара и жидкости. Результаты численного моделирования показали, что именно на собственной частоте совместных колебаний заметно существенное проявление параметрического резонанса. Показано, что изменение частотного диапазона проявления параметрического резонанса обусловлено совместимостью движения компонент системы, колебания существенно возрастают, что требует делать моделирование на основе нелинейных алгоритмов.

## Вступ

Для багатьох інженерних систем, пов’язаних із транспортуванням рідких вантажів, постає проблема динаміки, викликана коливаннями рідини з вільною поверхнею. У разі великої відносній масі рідини її хвильові рухи можуть суттєво впливати на динаміку транспортного засобу. Це висуває додаткові вимоги до системи управління і може бути причиною небажаних режимів руху і навіть аварійних ситуацій [2]. Тому необхідно володіти високодостовірною моделлю процесів у системах резервуар–рідина, зручною для теоретичного аналізу та чисельної реалізації. Важливим класом задач є узагальнення класичної задачі Фарадея для резервуара із рідиною, що здійснює заданий рух у вертикальному напрямку [4-6]. Таке узагальнення проводиться у трьох напрямках [1]: рух системи «резервуар – рідина» здійснюється за наданням додаткових ступенів вільності, наприклад, дозволяється поступальний рух системи у горизонтальному напрямку, або кутовий рух резервуара; на відміну від класичної задачі Фарадея задача розглядається у сумісній постановці; розглядаються випадки не лише циліндричної форми резервуара, а й інші форми. Такі узагальнення відповідають задачам про повздовжній рух літальних апаратів, суден, коли закріплення конструкції резервуару із рідиною немає, а рух відбувається у зв’язаному режимі. З іншого боку задачі динаміки резервуарів нециліндричної форми являють собою мало досліджену область, де до теперішнього часу одержано мало практичних результатів.

У роботі розглядається задача про розвиток параметричних коливань рідини із вільною поверхнею у резервуарі у формі двопорожнинного гіперболоїда у випадку, коли резервуар рухається вертикально під дією сили, що змінюється за заданим гармонічним законом із можливістю горизонтального поступального руху. Поведінка системи розглядається у рамках нелінійної багатомодової моделі сумісного руху резервуара і рідини.

## Постановка задачі

Ставиться задача дослідити поведінку системи «резервуар – рідина із вільною поверхнею» під час гармонічного збудження руху силою, прикладеною до резервуару. Поведінку системи розглянуто для частот параметричного резонансу, визначених як на основі класичного параметричного резонансу Фарадея, так і на основі узагальненої задачі про параметричний резонанс.

**Метод дослідження**

Розглядається резервуар у формі двопорожнинного гіперболоїда. Нехай $\tau$ – область, яку займає рідина; $S_0$ і $S$ – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному русі; $\Sigma$ і $\Sigma_0$ – границі контакту рідини зі стінками резервуару у збуреному та незбуреному стані ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\xi(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини. Поступальний рух резервуара описується вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$. Припускається, що рідина ідеальна, однорідна, нестислива і у початковий момент часу вихрові рухи відсутні. У цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей. Резервуар є абсолютно твердим тілом із абсолютно жорсткими стінками.

**Постановка задачі [2]:**

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{у} \quad \tau; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \quad \text{на} \quad \Sigma; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{на} \quad S; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{4}$$

Тут рівняння (1) відповідає вимозі нерозривності потоку в об’ємі рідини $\tau$, (2) – умова неперетікання на твердій межі контакту тіло – рідина $\Sigma$, (3) – умова неперетікання на вільній збуреній поверхні рідини $S$, (4) – динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини і тиску атмосфери над нею.

Із точки зору аналітичної механіки задача складається із кінематичних умов (механічних в’язей) (1) – (3), які необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу, і динамічної умови (4), яка є природною для варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Згідно робіт [2, 3, 8] рівняння зв'язаного руху системи можна отримати з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{5}$$

де

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2}M_p(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2 dS - (M_p + M_f)\varepsilon_z g\,.$$

Тут $\rho$ – густина рідини, $M_p$ – маса резервуара, $M_f$ – маса рідини, $g$ – прискорення вільного падіння. При використанні варіаційного методу задачу можна звести до такої, що описується мінімальною кількістю незалежних змінних, а виходячи із твердження, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь, збурення вільної поверхні $\xi$ і переміщення резервуара $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух рідини в об'ємі. Таким чином потенціал швидкостей $\varphi$ вважаємо залежною змінною. Тому розклади шуканих змінних збурення вільної поверхні рідини $\xi$ і потенціалу швидкостей $\varphi$ можна представити у вигляді:

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta)\,,$$

$$\varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha,\beta) T_i(\theta)\,,$$

де

$$\bar{\psi}_i(\alpha) = \left.\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\right|_{\beta=0} = \left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\right)\Bigg|_{\beta=0}.$$

Ці розклади записано у недекартовій параметризації області, яку займає рідина:

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \quad \beta = \frac{z}{H}\,.$$

Тут через $r = f(z)$ позначено рівняння твірної порожнини, задане у циліндричній системі координат, $H$ – глибина порожнини, а $z = 0$ співпадає із незбуреною вільною поверхнею рідини $S_0$. Введення такої параметризації обумовлено тим, що для порожнин нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється у часі і не співпадає із незбуреною вільною поверхнею.

Для вивчення задачі побудована математична модель механічної системи «резервуар – рідина із вільною поверхнею» [2, 7], яка була протестована на прикладі перехідних процесів для задач динаміки резервуарів у формі тіл обертання із рідиною з вільною поверхнею. Математична модель представлена в амплітудних параметрах $a_i$ коливань рідини та руху резервуара $\vec{\varepsilon}$:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}(a_k,t)\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k,t)\ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k,\dot{a}_l,t), r=\overline{1,N+3}.$$

Тому коефіцієнти $p_{rn}$ визначаються через алгебраїчні форми від першого до третього порядків із коефіцієнтами, які визначаються через квадратури від форм коливань (координатних функцій). Для побудови координатних функцій був використаний метод допоміжної області, який на відміну від класичного методу враховує виконання умови неперетікання вище рівня незбуреної вільної поверхні.

**Дослідження руху системи під дією періодичної сили**

Розглядається задача про вхід системи резервуар – рідина у режим параметричних коливань. Резервуар гіперболоїдальної форми має два ступеня вільності – горизонтальний і вертикальний рух. Рух системи резервуар – рідина досліджується в сумісній постановці. Розглядається випадок, коли маса рідини перевершує масу резервуара у 5 разів.

Як відомо, параметричний резонанс в системі відбувається на подвоєній власній частоті. Визначення власних частот дає: власна частота системи без можливості поступального руху у горизонтальному напрямку буде 2,9435 Гц (парціальна частота коливань рідини у резервуарі), а власна частота коливань рідини у резервуарі у рамках зв'язаної моделі стає 3,4017 Гц. Зауважимо, що її зміна у бік збільшення узгоджується із відповідними теоремами про співвідношення парціальних і власних частот. Відповідно, розглядається поведінка системи повздовжньою силою, що змінюється за гармонічним законом на подвоєній частоті. У початковий момент часу рідині надавалося кінематичне збурення за першою (антисиметричною) формою коливань із амплітудою 0,02 радіуса вільної поверхні. Розглянуто три приклади частот: 1 – власна частота, 2 – парціальна частота і 3 – власна частота, зменшена на 12,5%. Надалі криві на малюнках пронумеровані у такому ж порядку. Для цих трьох випадків амплітуда збуджуючої сили бралася однаковою.

На рис. 1 показано зміну у часі амплітуд коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуара (приведено значення, віднесене до радіусу вільної поверхні рідини). Результати чисельного моделювання свідчать, що саме на власній частоті сумісних коливань (крива 1) помітний суттєвий прояв параметричного резонансу. Коливання швидко зростають до рівня 0,3 радіуса вільної поверхні. Для парціальної або зменшеної частоти (криві

2 і 3) прояв параметричного резонансу практично непомітний і коливання розвиваються в часі з амплітудами порядку початкового збурення.

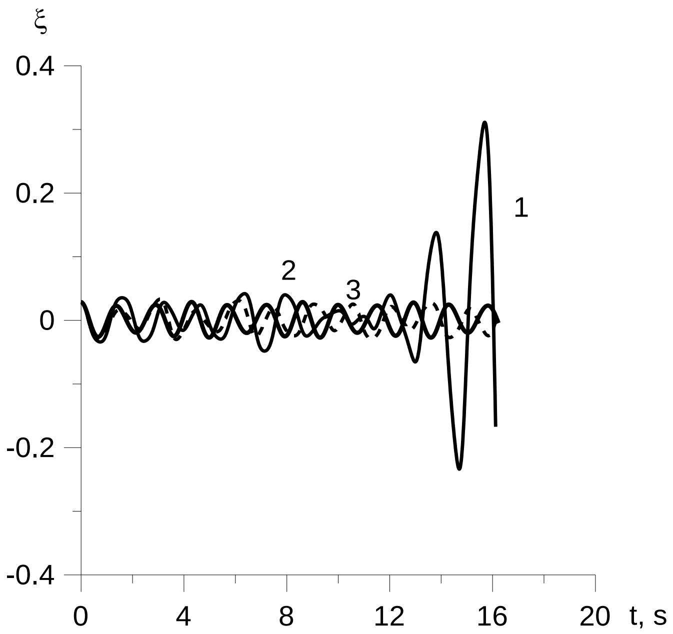


Рис. 1. Амплітуда коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуара

Аналогічно змінюється і параметр поступального руху резервуару у горизонтальному напрямку (рис. 2).

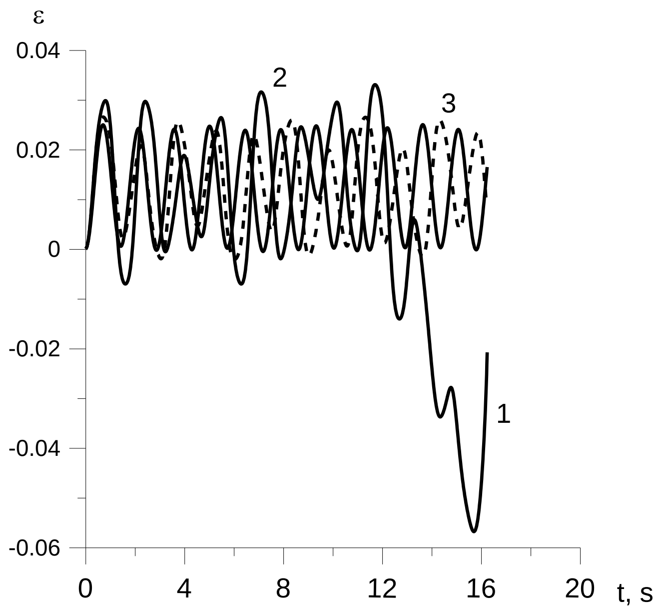


Рис. 2. Поступальний рух резервуару у горизонтальному напрямку

Через початкове несиметричне збурення системи і надалі коливання розвиваються не відносно нульового положення, а відносно зміщеного положення. Прояв параметричного резонансу призводить до суттєвого відхилення системи від початкового стану (крива 1), у двох інших випадках коливання резервуару находяться на рівні початкового збурення положення центру мас системи (нагадаємо, що маса рідини значно перевищує масу резервуара). Звернемо увагу, що рух резервуара виконується у протифазі руху вільної поверхні рідини.

**Висновки**

Задачу Фарадея про параметричні коливання резервуара із рідиною розглянуто в ускладненій постановці. Передбачається можливість руху резервуара у горизонтальному напрямку, рух системи збуджується не за рахунок заданих переміщень у вертикальному напрямку, а вертикальною силою, розглянуто випадок нециліндричного резервуару, динаміка системи розглядається в рамках моделі сумісного руху. Такий підхід у моделюванні значно більше відповідає реальним інженерним системам. Показано, що частотний діапазон прояву параметричного резонансу змінився, коливання суттєво зростають, що вимагає робити моделювання на основі нелінійних алгоритмів.

**Список використаної літератури**

1. *Константинов А. В.*, *Лимарченко О. С.*, *Мельник В. Н.*, *Семенова И. Ю.* (2016) “Задача о параметрических колебаниях резервуара нецилиндрической формы с жидкостью со свободной поверхностью”, Прикладная механика. Том 52, №6, с. 49-57.
2. *Лимарченко О. С.*, *Ясинский В. В.* (1997) “Нелинейная динамика конструкций с жидкостью”, НТТУ КПИ, Киев, Украина.
3. *Лимарченко О. С.*, *Губська В. В.* (2012) “Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною”, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. 1, № 4., 2012. С. 73–76.
4. *Ikeda T.* “Autoparametric Resonances in Elastic Structures Carrying Two Rectangular Tanks Partially Filled with Liquid”, J. Sound and Vibr, 302, N 4 – 5., 2007. pp. 657 – 682.
5. *Ibrahim R.* “Recent advances in physics of fluid paranetric sloshing and related problems”, J. of Fluid Engineering, 135, September, 2015. pp. 090801-1 – 090801-52.
6. *Ibrahim R. A.* “Liquid sloshing dynamics: theory and applications”, Cambridge University Press, 2005. 950 p.
7. *Limarchenko O. S.*, *Semenova I. Yu.* “Nonlinear wave generation on a fluid in a moving parabolic tank”, International Applied Mechanics, 46, No. 8, 2011. pp. 864-868.
8. *Limarchenko O. S.* “Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of

non-cylindrical shape", Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 59, No. 1, 2007. pp. 44-70.

9. *Pal P*. "Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study", International Journal of Recent Trends in Engineering, 1, № 6, 2009. pp. 1–5.