

Г. П. Гречка<sup>1</sup>, к.т.н., доцент

## ВІДНОВЛЕННЯ ПОСТІЙНОГО КОРИСНОГО СИГНАЛУ, ПОРУШЕНОГО АПЕРІОДИЧНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

**En**

It was determined the exact analytical description of a constant value of useful signal, that was obtained as a result of measurement of the actual signal. It's consist of the sum of the useful signal and the perturbations signal, that are an aperiodic processes. The constant value of useful signal is defined through the derivatives up to the fourth order of the perturbations process inclusively in the point  $t > 0$  of the measured signal.

**Ru**

Определено точное аналитическое описание постоянной величины полезного сигнала, полученного в результате измерения реального сигнала, состоящего из суммы самого полезного сигнала и сигнала возмущений, которые являются аperiodическими процессами. Постоянная величина полезного сигнала определяется через производные до четвертого порядка процесса возмущений (включительно), взятых в точке  $t > 0$  измеряемого сигнала.

### Вступ

В галузі вимірювання параметрів механічних величин, таких як сила, тиск, кутова швидкість та прискорення сили тяжіння Землі тощо значне місце займають задачі, пов'язані з вимірюванням постійної (сталої) величини корисного сигналу, яка спотворюється зовнішніми випадковими збуреннями, що носять коливальний або аперіодичний характер. Такі випадки виникають, коли вимірювання здійснюються відповідними приладами, що встановлені, переважно, на рухомих об'єктах при їх стоянці. Збурення виникають при дії на об'єкт працюючих установлених на ньому агрегатів, поривів вітру, або під час пересування по ньому членів екіпажу. Стосується це також, наприклад, роботи вагових систем та ваг, які вмонтовані в різні технологічні лінії при фасуванні продуктів та при визначенні ваги залізничних вагонів під час їх руху, а також при проведенні гравіметричних вимірювань, гірокомпасуванні тощо. Оскільки перераховані задачі мають значне практичне значення, то їм приділяється велика увага практиків і науковців.

У цьому напрямку відома робота [1], в якій відмічається, що для вимірювань найбільш придатні частотні давачі завдяки своїй високій точності та ряду інших переваг, основними з яких є:

– відсутність втрат інформації, обумовлених дією навантаження;

<sup>1</sup> Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

- простота лінії зв'язку з системою обробки результатів вимірювань;
- велика заводо захищеність по відношенню промислових завод;
- простота обробки та реєстрації вихідних сигналів.

Але акцент у цій роботі зосереджений, в основному, на дослідженні періодичних збурень. Дослідженню аперіодичних сигналів безпосередньо стосується монографія [2]. Характерною ознакою цих двох робіт є те, що для визначення сталої величини корисного сигналу застосовуються апроксимації вимірних сигналів з допомогою тригонометричних поліномів, що призводить до значних методичних похибок. Подальший розвиток цього напрямку вимірювань іде за рахунок удосконалення апаратних засобів при допомозі їх комп'ютеризації. Велика практична значимість цих досліджень обумовлює їх актуальність.

### Постановка задачі

Мета статті полягає в одержанні точного аналітичного описання сталої величини корисного сигналу за результатами вимірювання вихідного сигналу збурень в точці  $t > 0$  та його похідних у цій точці.

### Виклад основного матеріалу

Розглянемо наступну задачу. Нехай

$$F(t) = f_c + x(t), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Тут  $f_c$  – постійне невідоме число, яке характеризує сталу величину постійного корисного сигналу, а  $x(t)$  є розв'язок деякого диференціального однорідного рівняння виду [ 3 ]

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad t > 0; \quad x_0(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = x_1. \quad (2)$$

Відносно нього відомо, що  $h > 0$  і корені його характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -q_1, \\ \lambda_2 &= -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -q_2 \end{aligned}$$

дійсні ( $h > \omega_0$ ) і при цьому  $0 < q_1 < q_2$ . Ці початкові умови характеризують аперіодичні процеси.

Загальний розв'язок однорідного рівняння (2) має вигляд

$$x(3)(t) = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

і, таким чином, має чотири невідомих коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $q_1$  і  $q_2$ .

Функцію  $F$  можна трактувати як вихідний сигнал вимірювального пристрою, на вхід якого подається сигнал  $f_c$ , що спотворюється адитивною добавкою  $x(t)$  механічних збурень.

Задача полягає в наступному: необхідно виділити постійний корисний сигнал  $f_c$  у точці  $t_0 > 0$  функції  $F$  та її перші чотири похідні:

$$\begin{aligned} F(t_0) &= f_c + x(t_0); \\ F'(t_0) &= x'(t_0); \quad F''(t_0) = x''(t_0); \\ F'''(t_0) &= x'''(t_0); \quad F^{(4)}(t_0) = x^{(4)}(t_0). \end{aligned}$$

Так як всі похідні функції  $F$  співпадають з відповідними ми  $x$ , то фактично задача полягає в тому, щоб по значенням похідних, них,  $x'(t_0)$ ,  $x''(t_0)$ ,  $x'''(t_0)$  і  $x^{(4)}(t_0)$ , які безпосередньо вимірюються в точці  $t_0$ , відновити  $x(t_0)$ . З урахуванням формули (3) маємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x'(t_0) = x_1 = -q_1 A e^{-q_1 t_0} - q_2 B e^{-q_2 t_0}, \\ x''(t_0) = x_2 = q_1^2 A e^{-q_1 t_0} + q_2^2 B e^{-q_2 t_0}, \\ x'''(t_0) = x_3 = -q_1^3 A e^{-q_1 t_0} - q_2^3 B e^{-q_2 t_0}, \\ x^{(4)}(t_0) = x_4 = q_1^4 A e^{-q_1 t_0} + q_2^4 B e^{-q_2 t_0} \end{cases} \quad (4)$$

Введемо нові позначення

$$q_1 = u, \quad q_2 = v, \quad (0 < u < v), \quad e^{-q_1 t_0} = s, \quad B e^{-q_2 t_0} = r.$$

Тоді система (4) приймає вигляд

$$\begin{cases} x_1 = -us - vr, \\ x_2 = u^2 s + v^2 r, \\ x_3 = -u^3 s - v^3 r, \\ x_4 = u^4 s + v^4 r, \end{cases} \quad (5)$$

де  $u$ ,  $v$ ,  $r$  і  $s$  – невідомі величини, а  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  і  $x_4$  – виміряні значення похідних функції  $F$ . Крім того, із (3) випливає, що

$$x(t_0) = A e^{-q_1 t_0} + B e^{-q_2 t_0} = s + r. \quad (6)$$

Отже, для обчислення  $x(t_0)$  із системи (5) потрібно знайти  $s + r$ . Спочатку із перших рівнянь (5) одержимо

$$\begin{cases} x_1 u + x_2 = (v^2 - uv)r, \\ x_1 v + x_2 = (u^2 - uv)s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -\frac{x_1 u + x_2}{v(u - v)} \\ s = \frac{x_1 v + x_2}{u(u - v)}, \end{cases}$$

звідки

$$s + r = \frac{x_1 v^2 + x_2 v - x_1 u^2 - x_2 u}{uv(u - v)} = \frac{-x_1(u + v) - x_2}{uv}. \quad (7)$$

## Розділ 2. Механіка

Використовуючи решту рівнянь системи (5) визначимо так само  $s$  і  $r$ .  
Одержимо

$$\begin{cases} x_3 u + x_4 = -uv^3 r + v^4 r, \\ x_3 v + x_4 = -u^3 v s + u^4 s, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = -\frac{x_3 u + x_4}{v^3(u - v)} \\ s = \frac{x_3 v + x_4}{u^3(u - v)}, \end{cases}$$

Тепер визначимо  $x_1$  і  $x_2$  через  $x_3$  і  $x_4$ , знаючи  $r$  і  $s$ . Маємо

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{x_3 v + x_4}{u^2(u - v)} + \frac{x_3 u + x_4}{v^2(u - v)}, \\ x_2 = \frac{x_3 v + x_4}{u(u - v)} - \frac{x_3 u + x_4}{v(u - v)}. \end{cases} \quad (8)$$

Із (8) легко знаходимо

$$\begin{aligned} x_1 (uv)^2 &= x_3 [(u + v)^2 - uv] + x_4 (u + v), \\ x_2 (uv) &= -x_3 (u + v) - x_4. \end{aligned}$$

Введемо ще нові позначення

$$u + v = m, \quad uv = n \quad (n > 0, m > 0)$$

і запишемо

$$\begin{aligned} x_1 n^2 &= x_3 (m^2 - n) + x_4 m, \\ x_2 n &= -x_3 m - x_4. \end{aligned}$$

Звідки

$$n = \frac{-x_3 m - x_4}{x_2} \quad (9)$$

і отже

$$x_1 \left( \frac{-x_3 m - x_4}{x_2} \right)^2 = x_3 \left( m^2 + \frac{x_3 m + x_4}{x_2} \right) + x_4 m.$$

Виконавши прості перетворення, одержимо

$$\begin{aligned} m^2 (x_1 x_3^2 - x_3 x_2^2) + m (2 x_1 x_3 x_4 - x_2 x_3^2 - x_4 x_2^2) + \\ + (x_1 x_4^2 - x_2 x_3 x_4) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язавши квадратне рівняння (10), одержимо наступні значення для  $m$

$$m_1 = \frac{-x_1 x_4 + x_2 x_3}{x_1 x_3 - x_2^2}, \quad m_2 = \frac{-x_1 x_3 x_4 + x_4 x_2^2}{x_1 x_3^2 - x_3 x_2^2}.$$

Підставимо значення  $m$  в (9) знаходимо для  $n$

$$n_1 = \frac{x_2 x_4 - x_3^2}{x_1 x_3 - x_2^2}, \quad n_2 = 0$$

З огляду на те, що  $m, n > 0$ , остаточно одержимо для  $m, n$  їх наступні значення

$$m = \frac{-x_1 x_4 + x_2 x_3}{x_1 x_3 - x_2^2}, \quad n = \frac{x_2 x_4 - x_3^2}{x_1 x_3 - x_2^2}.$$

За допомогою (7) легко знаходимо значення  $x(t_0)$

$$x(t_0) = Ae^{-q_1 t_0} + Be^{-q_2 t_0} = s + r = \frac{x_1^2 x_4 - 2x_1 x_2 x_3 + x_2^3}{x_2 x_4 - x_3^2}.$$

Таким чином, для визначення невідомого корисного постійного сигналу  $f_c$  одержимо наступний вираз:

$$f_c = F(t_0) - x(t_0) = F(t_0) - \frac{x_1^2 x_4 - 2x_1 x_2 x_3 + x_2^3}{x_2 x_4 - x_3^2},$$

або підставивши значення  $x_1, x_2, x_3$  і  $x_4$ , остаточно одержимо

$$f_c = F(t_0) - \frac{[F'(t_0)]^2 F^{(4)}(t_0) - 2F'(t_0) F''(t_0) F'''(t_0) + [F''(t_0)]^3}{F''(t_0) F^{(4)}(t_0) - [F'''(t_0)]^2}.$$

Подальшим кроком дослідження цього питання слід вважати пошук швидких алгоритмів обчислення постійного корисного сигналу, використовуючи властивості степеневі функції [4].

### Висновок

Одержано точну аналітичну формулу для знаходження постійного корисного сигналу, порушеного аперіодичними збуреннями, який обчислюється через похідні до четвертого порядку (включно), взяті в точці  $t > 0$  виміряного сигналу процесу збурень.

### Список використаної літератури

1. Ракаев А. П. Измерение постоянной составляющей механической величины частотными преобразователями. – Автореферат диссертации на соискание учёной степени к.т.н. – М. 1973. – 26 с.
2. Цема М. И. Измерение и обработка параметров монотонно затухающих сигналов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 120 с.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 568 с.
4. Хюн. Измерение экспоненциальных сигналов методом фазовых траекторий. – Приборы для научных исследований, 1969, № 8. С. 84-86.