

## **ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ ІНТЕГРАЦІЇ МЕТОДУ ВУЗЛОВОЇ КОНДЕНСАЦІЇ ТА ПАКЕТУ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО АНАЛІЗУ**

### **Вступ**

В сучасних інерціальних навігаційних системах широко застосовуються датчики з пружними підвісами [1], [2], [3]. У загальному випадку пружні підвіси мають вигляд просторових конструкцій, а вибір їх оптимальних параметрів вимагає багаторазових розрахунків[4] і, в першу чергу, характеристик жорсткості[5]. Також, застосовувані алгоритми для розробки прикладних програм розрахунку, крім високої точності повинні забезпечувати мінімальний час обчислень, можливість реалізації діалогового режиму роботи користувача з комп'ютером, а також зручний інтерфейс [7]. Тому задача підвищення ефективності алгоритмів визначення жорсткісних характеристик міжвузлових пружних зв'язків є важливою і актуальною.

### **Постановка задачі**

Мета статті полягає у дослідженні можливості інтеграції методу вузлової конденсації та пакету скінченно-елементного аналізу для підвищення ефективності алгоритмів визначення жорсткісних характеристик міжвузлових пружних зв'язків у просторових конструкціях.

### **Основні результати**

При розрахунку механічних частин інерційних датчиків доцільно окремі елементи їх конструкції умовно розділити на наступні дві групи: інерційні абсолютно жорсткі елементи і безінерційні пружні елементи. Тоді розрахункова схема механічної частини інерційного датчика, що включає його пружний підвіс, може бути представлена у вигляді схеми з'єднання пружних елементів, у вузлах якої можуть прикладатися вектори узагальнених сил (у разі їх наявності), обумовлених як силами інерції, що виникають в інерційних елементах конструкції, так та іншими фізичними чинниками.

Приклад розрахункової схеми двомасового камертонного мікромеханічного гіроскопа зображений на рис.1. Зазначимо, що жорсткісні характеристики пружних елементів конструкції повністю і однозначно характеризують їх матриці жорсткості, а вектори-стовпці

узагальнених сил включають в себе (в якості компонент) проєкції на осі базової координатної системи діючих сил і моментів сил.

Основна система методу вузлової конденсації будується з розрахункової схеми за допомогою наступних перетворень:

- Усі вектори-стовпці узагальнених сил і матриці жорсткості пружних елементів розрахункової схеми переводяться в єдину глобальну систему координат;
- Усі вузли, з'єднані між собою абсолютно жорсткими зв'язками (в тому числі і через основу), з'єднуються в єдиний вузол;
- Матриці жорсткості пружних елементів з паралельним з'єднанням - сумуються;
- Вектори-стовпці узагальнених сил, прикладених до одного і того ж вузлу, сумуються;
- У вузол, жорстко пов'язаний з основою, замість жорсткого закріплення прикладається узагальнена сила, яка дорівнює за величиною сумі всіх узагальнених сил системи і протилежна їй за знаком

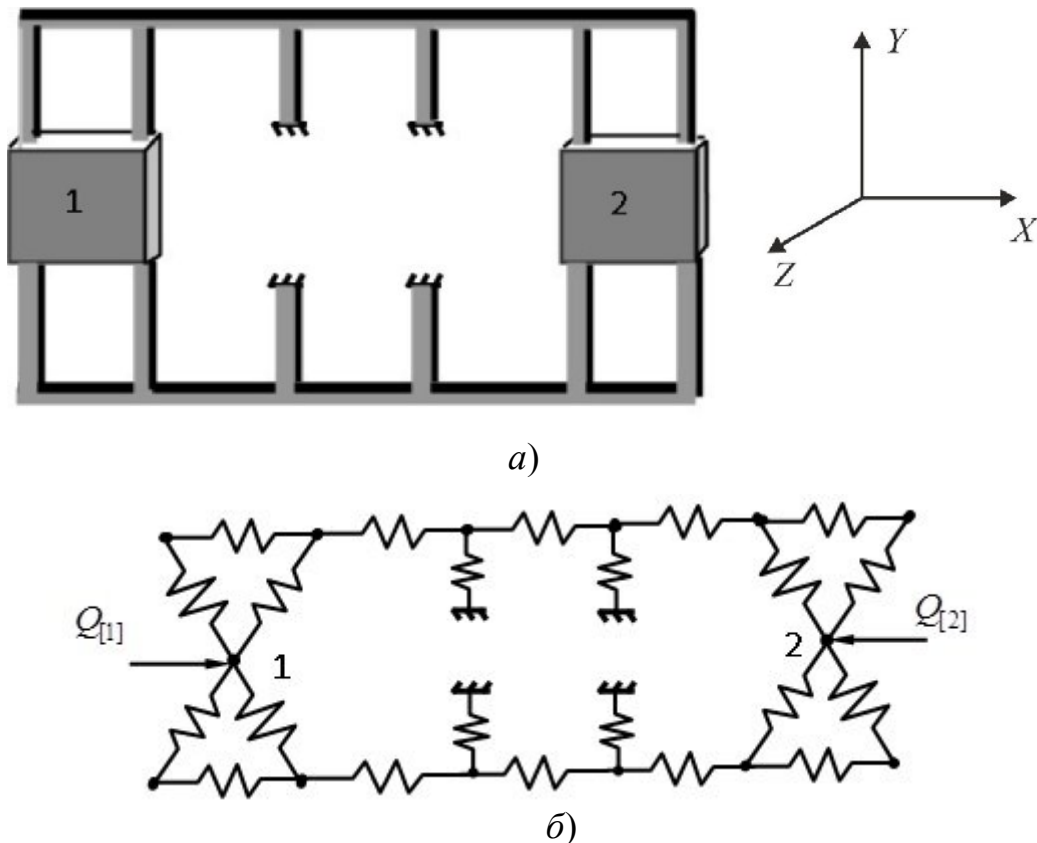


Рис. 1. Механічна частина мікромеханічного гіроскопа:  
а) конструкція; б) розрахункова схема

Таким чином, основна система методу вузлової конденсації має вигляд схеми з'єднань пружних елементів, у якій між двома вузлами знаходиться не більше одного пружного елемента і в одному вузлі може бути прикладена лише одна узагальнена сила. На додаток до цього

кожному вузлу привласнюється номер, і цей номер має діюча в ньому узагальнена сила (записується у вигляді нижнього індексу в квадратних дужках при відповідній узагальненій силі). У свою чергу матриці жорсткості пружних елементів також позначаються номерами вузлів (записуються у вигляді нижнього індексу в квадратних дужках при відповідних матрицях жорсткості), між якими знаходяться ці пружні елементи.

Приклад основної системи для розрахунку методом вузловий конденсації показаний на рис. 2.

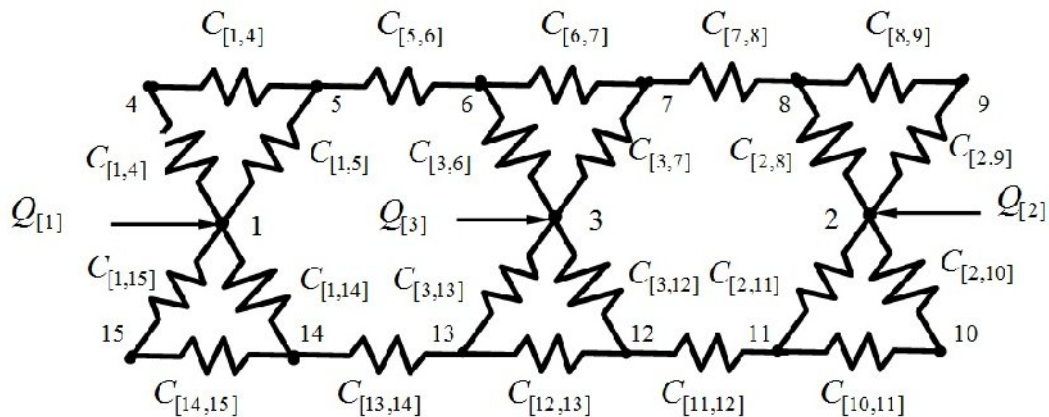


Рис. 2. Основна система для розрахунку методом вузлової конденсації

Ідея методу вузлової конденсації полягає в послідовному перетворенні основної системи в еквівалентну схему з меншою кількістю вузлів. Тоді в остаточній схемі, конфігурація якої визначається розв'язуванням завданням, матриці жорсткості еквівалентних пружних елементів, розташованих між рештою вузлів, і вектори-стовпці узагальнених сил, прикладених в незвільнені вузли, будуть шуканими результуючими матрицями жорсткості і узагальненими силами, необхідними для визначення основних характеристик розглянутих інерційних датчиків. Зазначимо, що номери виключених згідно з методом вузлової конденсації вузлів вказуються в нижньому індексі (у круглих дужках) матриць жорсткості і векторів-стовпців узагальнених сил перетворених систем. Приклад перетвореної відповідно до методу вузлової конденсації схеми пружного підвісу двомасового камертонного мікромеханічного гіроскопа показаний на рис. 3.

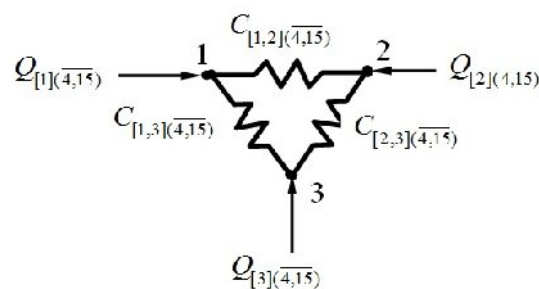


Рис. 3. Схема пружного підвісу мікромеханічного гіроскопа, перетворена в відповідності з методом вузлової конденсації

Розрахункові формули методу вузлової конденсації є рекурентними і можуть застосовуватися на кожному етапі еквівалентних перетворень основної системи. При цьому можна довести такі властивості матриць жорсткості еквівалентних пружних елементів і векторів-стовпців узагальнених сил у перетворених схемах:

- Сумарні матриці жорсткості пружних елементів, з'єднаних в одному вузлі, є позитивно визначеними матрицями як у вихідних, так і в перетворених схемах;
- Величини матриць жорсткостей еквівалентних пружних елементів і векторів-стовпців узагальнених сил у перетворених схемах у загальному випадку залежать від номерів виключених в процесі перетворень вузлів, але не залежать від послідовності їх виключення;
- Для матриць жорсткостей пружних елементів, що з'єднують  $i$ -ий і  $j$ -ий вузли справедлива рівність  $C_{[i,j](\dots)} = C_{[j,i](\dots)}^T$ , як у вихідній, так і в перетвореній схемах (тут верхній індекс « $T$ » позначає матричну операцію транспонування).

Необхідно відзначити, що в математичному аспекті метод вузлової конденсації являє собою узагальнений алгоритм виключення Гауса при вирішенні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, в якому вводиться певна послідовність виключення змінних і сувора відповідність їм рівнянь, які беруть участь у виключенні змінних.

Розглянемо питання визначення величини навантаження, що діє на окремо взятий пружний елемент конструкції пружного підвісу. У цьому випадку вихідну схему необхідно перетворити за алгоритмом методу вузлової конденсації в схему з двома невиключеними вузлами, причому ними повинні бути вузли, між якими розташовується цікавий для нас пружний елемент з шуканим навантаженням. При цьому застосування рекурентних формул вузлової конденсації дозволяє визначити в отриманій перетвореній схемі результуючу матрицю жорсткості еквівалентного пружного елемента і вектори-стовпці узагальнених сил. Зазначимо, що пружний елемент, що нас цікавить у реформованій схемі входить до складу еквівалентного пружного елемента за допомогою паралельного з'єднання, що дозволяє для визначення навантаження на цей пружний елемент застосувати формулу перерозподілу загального навантаження на елементи в конструкції з паралельним з'єднанням пружних елементів.

При використанні цього методу найбільший порядок матриць, які вимагають обернення, дорівнює шести. При цьому загальна кількість матриць, які вимагають обернення, не перевищує числа вузлів основної системи. Внаслідок цього час розрахунку пружних просторових конструкцій підвісів інерційних датчиків є досить малим, що забезпечує

можливість реалізації діалогового режиму обчислень на персональних комп'ютерах.

З усього вищезазначеного випливає, що для реалізації методу вузлової конденсації необхідна наявність матриць жорсткості усіх пружних елементів розрахункової схеми.

Слід зазначити, що пружні елементи механічних конструкцій часто мають складну форму і тому аналітичне визначення їх матриць жорсткості є неможливою задачею.

Для визначення матриць жорсткості таких елементів пропонується використовувати один з пакетів скінчено-елементного аналізу.

Розроблена методика визначення матриці жорсткості досліджуваного пружного елемента базується на відомому співвідношенні  $C = \Delta^{-1}$ , де  $\Delta$  - його матриця податливості, і використовує фізичний зміст елементів цієї матриці:

Елемент матриці податливості  $\delta_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, 6}$ ) – це величина, чисельно рівна переміщенню  $i$ -му напрямку при дії одиничної сили  $j$ -му напрямку:

$$\delta_{ij} = q_i \left| \begin{array}{l} Q_j = 1, Q_k = 0 (\forall k, k \neq j) \end{array} \right. \quad (1)$$

$\delta_{ii}$  – діагональні елементи характеризують податливість стрижня в напрямкі діючих сил  $Q_i = 1$ ;

$\delta_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) – ці елементи характеризують лінійну податливість стрижня;

$\delta_{ij}$  ( $i, j = \overline{4, 6}$ ) – ці елементи характеризують кутову податливість стрижня);

$\delta_{ij}$  ( $i = \overline{1, 3}, j = \overline{4, 6}$ ) і ( $i = \overline{4, 6}, j = \overline{1, 3}$ ) – ці елементи характеризують перехресні зв'язки між кутовими та лінійними переміщеннями полюса.

Методика визначення матриці податливості досліджуваного пружного елемента

- Побудова твердотільної моделі пружного елемента
- Визначення лінійних і лінійно-кутових елементів матриці податливості з використанням виразу (1). Слід зазначити, що лінійні переміщення полюса надаються пакетом автоматично.
- Визначення кутових елементів матриці податливості. Кутові переміщення визначаються геометрично.

Як приклад наведемо елементи матриці податливості прямолінійного стрижня, розраховані аналітично, і отримані застосуванням методики в пакеті скінченно-елементного аналізу.

**Розрахунок елементів матриці жорсткості в пакеті скінчено – елементного аналізу**

Порівняємо жорсткісні характеристики стрижня отримані методом вузлової конденсації та скінчено елементного аналізу.

Загальний вигляд стрижня зображений на рис. 4.

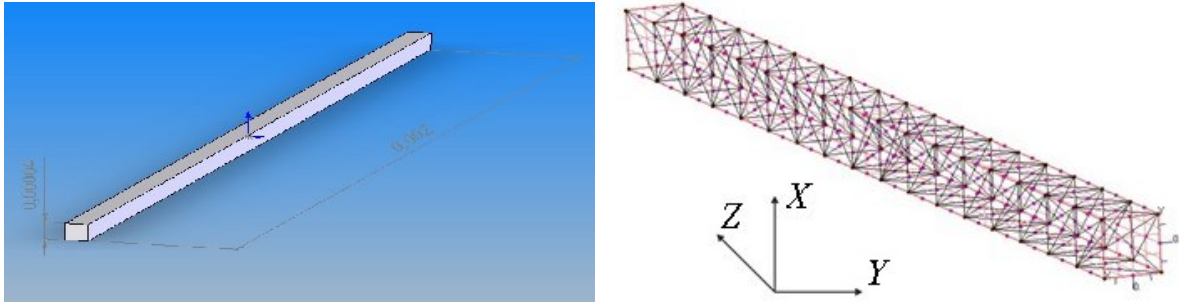


Рис. 4. Загальний вигляд стрижня

Навантаження стрижня на розтяг, згин, кручення зображено на рис. 5.

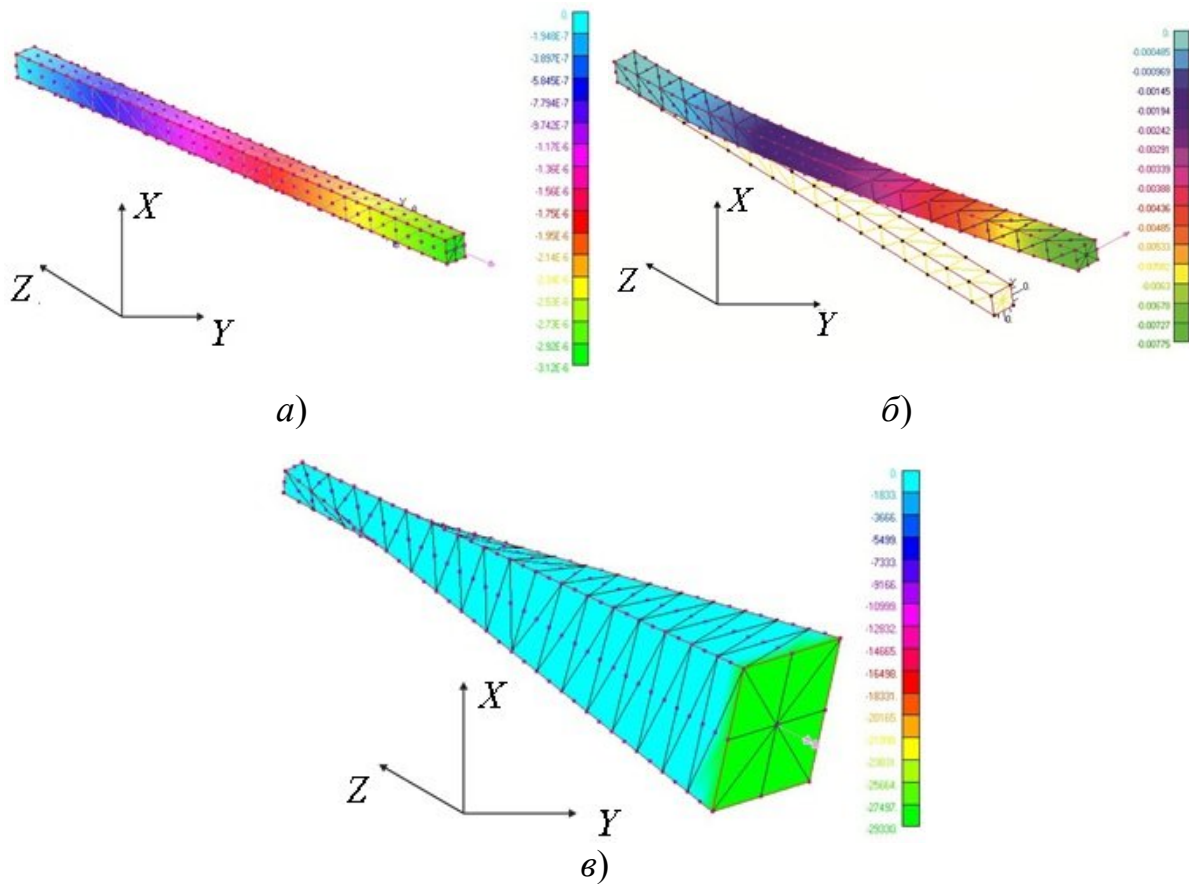


Рис. 5. Навантаження стрижня *a)* на розтяг; *б)* на згин; *в)* на кручення

Отримані елементи матриці податливості представлено у табл. 1. Для зменшення громіздкості в таблицю занесемо тільки її діагональні елементи. Усі числові значення мають розмірність системи одиниць СІ.

**Таблиця 1.**

Елемент матриці податливості	Значення, отримане завдяки аналітичному розрахунку	Значення, отримане завдяки пакету скінчено – елементного аналізу
$\delta_{11}$	$1.5625 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$
$\delta_{22}$	$1.5625 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$
$\delta_{33}$	$6.25 \cdot 10^{-6}$	$6.24 \cdot 10^{-6}$
$\delta_{44}$	$4.6875 \cdot 10^4$	$4.6612 \cdot 10^4$
$\delta_{55}$	$5.73 \cdot 10^4$	$5.69 \cdot 10^4$
$\delta_{66}$	$6.926 \cdot 10^4$	$5.866 \cdot 10^4$

З таблиці видно, що елементи матриці податливості, отримані аналітично і за допомогою пакета співпали з допустимою похибкою.

Розглянемо просторову конструкцію мікромеханічного гіроскопа.

Загальний вигляд мікромеханічного гіроскопа зображено на рис. 6.

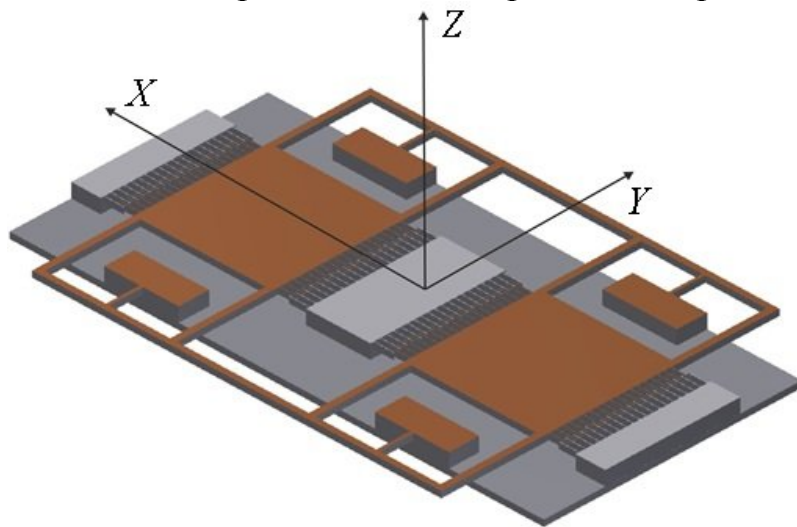


Рис. 6. Загальний вигляд мікромеханічного гіроскопа

Навантаження на механічну частину гіроскопу зображено на рис. 7.



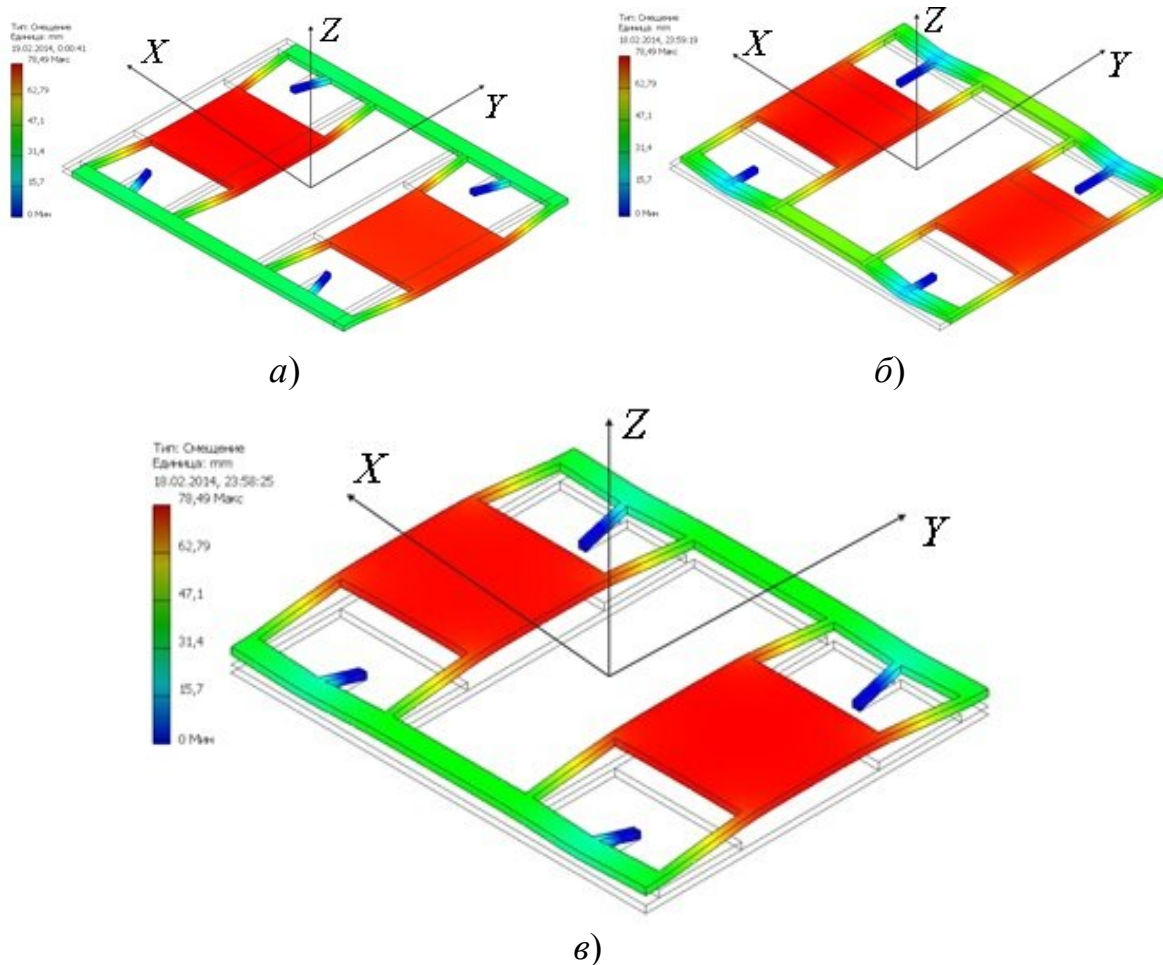


Рис. 7. Навантаження: а) по осі X; б) по осі Y; в) по осі Z

В табл. 2 вказані діагональні елементи матриці податливості пружного підвісу ММГ. Усі числові значення мають розмірність системи одиниць СІ.

**Таблиця 2**

Елемент матриці податливості	Значення, отримане аналітично	Значення, отримане завдяки пакету скінченно – елементного аналізу
	$3.14 \cdot 10^{-4}$	$3.22 \cdot 10^{-4}$
$\delta_{22}$	$7.88 \cdot 10^{-3}$	$7.80 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{33}$	$5.38 \cdot 10^{-3}$	$5.32 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{44}$	0.429	0.44
$\delta_{55}$	0.535	0.52
$\delta_{66}$	0.546	0.55

## Висновок



Інтегральний підхід з достатньою точністю дозволяє обчислити жорсткісні характеристики складних механічних конструкцій. Перевагами такого підходу, на відміну від прямого застосування методу скінченних елементів, є відсутність потреби створення нової твердотільної моделі конструкції при зміні її геометричних розмірів, можливість розрахунків для складальних конструкцій, підвищення точності обчислень за рахунок того, що окремі пружні елементи моделюються у пакетах скінченно-елементного аналізу більш точно, ніж уся конструкція в цілому.

Порівняння проведених розрахунків жорсткісних характеристик пружного підвісу гіроскопу за допомогою прямого застосування методу скінченних елементів та методу вузлової конденсації з використанням матриць податливості окремих пружних елементів, отриманих у пакеті скінченно-елементного аналізу, показало, що комбінований підхід дозволяє суттєво спростити розрахунки жорсткісних характеристик складних, зокрема, складальних, механічних конструкцій.

### Список використаної літератури

1. Балабанов И. В. Об одной задаче для динамически настраиваемого гироскопа с упругим подвесом. //И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова, Г. М. Виноградов, Н. А. Темляков / Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем. Российско-американский журнал. Казанский государственный технический университет «КАИ». – Науч.-техн. сб. – Казань, 2006.- №2(22).- С.20-27.
2. Балабанов И. В. Похибки двокільцевого динамічно настроюваного гіроскопа, обумовлені конструкцією його пружного підвісу. //І. В. Балабанов, В. Г. Цирук / Наукові вісті. – Київ, 2007.-№4. – С. 114-120.
3. Балабанова Т. В. Визначення робочої кутової жорсткості типового елемента пружного підвісу динамічно настроюваного гіроскопа //Т. В. Балабанова/ Механіка гіроскопічних систем. –Міжвід. наук.-техн. зб. – Київ, 2008.- вип.19.- С. 18-20.
4. Балабанов И. В. Расчет и оптимизация двухрамочного упругого подвеса динамически настраиваемого гироскопа //И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова, А. В. Збруцкий/ под ред. А. В. Збруцкого.-К.: НТУУ «КПИ», 2013.-272 с.
5. Балабанов И. В. Метод узловой конденсации для расчета упругих пространственных систем //И. В. Балабанов / Механіка гіроскопічних систем. – Науч.-техн. зб. – Київ, 2009.- вип. 20.
6. Балабанов И. В. Исследование жесткостных характеристик типовых элементов упругих подвесов навигационных датчиков. //И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова, В. И. Степин, А. П. Корель /

Механіка гіроскопічних систем. – Наук.-техн. зб. – Київ, 2009.- вип.20.- С.66-78.

7. Балабанова Т.В. Исследование возможности визуализации преобразования расчетных схем при расчете упругих подвесов методом узловой конденсации. //Т. В. Балабанова, П. А. Клейменов/ Матеріали ІV МНТК “Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки ” - Київ, 2003. – Т.1. – С. 160-166.