

УДК 532.505

DOI: <http://doi.org/10.20535/2219-3804222020213289>

**В. В. Губська**<sup>1</sup>, *старший викладач, к.ф.-м.н.*, **О. С. Лимарченко**<sup>2</sup>, *професор, д.ф.-м.н.*, **О. О. Сіренко**<sup>3</sup>, *співшукач*

## ОСОБЛИВОСТІ ДІЇ ПИЛОПОДІБНОГО СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ДИНАМІКУ КОНСТРУКЦІЇ ІЗ РІДИНОЮ

**En**

Within the framework of the nonlinear statement, we consider a problem of dynamics of a cylindrical reservoir with a liquid under non-periodic force loading in the form of a saw-tooth pulse. The selection of such type of loading is caused by the application of such type of impulses for variation of position or orientation of the structure, but not sinusoidal type, which is more peculiar to systems with recovering force. This type of pulses is used both periodically and one-time. The problem of impulse disturbance of the translational motion of the cylindrical reservoir partially filled with liquids is considered. Modeling is done based on the nonlinear model of the combined motion of a liquid with a free surface and the reservoir, which uses the problem statement in the form of the Hamilton-Ostrogradskiy variational principle, variational methods of mathematical physics and methods of nonlinear mechanics. The developed nonlinear model of dynamics of combined motion of the structure with a liquid was tested for different problems of translational and angular motion of the systems and qualitatively reflects main properties of such systems in the nonlinear range of excitations of parameters, which were given in numerous publications of experimental direction. A comparison of the obtained results with a variant of disturbance of motion by the pulse in the form of one period of sine is done. Variation in time of excitation of a liquid free surface and velocity of the translational motion of the reservoir was analyzed. Moreover, we consider the case when the liquid mass exceeds considerably the structure mass, which causes the considerable effect of liquid filling on the system dynamics. It was shown that activation of the saw-tooth pulse of force results in perturbations of kinematical parameters (excitation of a liquid free surface on reservoir walls and the velocity of translational motion of the structure) of the system lesser

<sup>1</sup> КІІ ім. Ігоря Сікорського

<sup>2</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка

<sup>3</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка

that in the case of the action of the sine-type pulse. We explain this effect and note the presence of amplitude and frequency modulation in the law of variation of excitations of a liquid free surface.

**Ru**

В совместной нелинейной постановке рассмотрена задача динамики цилиндрического резервуара с жидкостью под действием неперiodической силовой нагрузки в форме пилообразного импульса. Изучается задача об импульсном возбуждении поступательного движения цилиндрического резервуара, частично заполненного жидкостью. Моделирование осуществляется на основе нелинейной модели совместного движения жидкости со свободной поверхностью и резервуара, которая основана на постановке задачи в форме вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, вариационных методах математической физики и методах нелинейной механики. Выполнено сравнение результатов с вариантом возбуждения движения импульсом в виде одного периода синусоиды. Проанализировано изменение во времени возмущения свободной поверхности жидкости и скорости поступательного движения резервуара. Показано, что действие пилообразного импульса силы приводит к возмущению кинематических параметров системы меньших чем в случае действия синусоидального импульса.

### **Вступ**

У складних умовах експлуатації сучасних транспортних засобів, які можуть перевозити вантажі з рухомими компонентами використовуються різні алгоритми керування рухом. Особливе значення набуває проблема високоточного керування такими системами під час виконання маневрів об'єктів із рідиною навколо інших відповідальних конструкцій, наприклад, причалювання кораблів, стиковка–розділення складових космічних апаратів, встановлення різних баків із рідиною (дизельне паливо, вода, змазочні олії, тощо) на АЕС. Найбільші проблеми виникають у випадку транспортування рідини із вільною поверхнею, коли відносна маса рідини може бути високою. Одним із напрямків розвинення нових засобів керування такими системами є використання імпульсного керування з подальшим вивченням питання про доцільність використання різних форм імпульсів. Аналізується можливість використання пилоподібних імпульсів для надання резервуару із рідиною поступальних переміщень за умови мінімізації збурення рухомості вільної поверхні рідини.

Моделі динаміки конструкцій із рідиною відносяться до багатовиду об'єктів із внутрішніми ступенями вільності, і у випадку високої відносної маси рідини суттєвим є урахування сумісного характеру руху складових компонентів системи, що традиційно є складною задачею. Імпульсний характер збудження руху призводить до збурення вищих форм коливань вільної поверхні рідини. Дослідження останніх років показують, що адекватне моделювання таких задач може бути виконане лише у рамках нелінійної математичної моделі сумісного руху складових компонент системи із урахуванням збурення вищих форм коливань вільної поверхні рідини [1-4].

### Постановка задачі

Метою роботи є дослідження особливостей впливу силового збудження сумісного руху системи резервуар – рідина з вільною поверхнею у випадку використання пилоподібного імпульсу.

### Математична модель

Розглянемо динаміку системи конструкція–рідина із вільною поверхнею. Резервуар розглядаємо як абсолютно тверде тіло, яке разом із конструкцією може здійснювати поступальний рух у горизонтальній площині під дією активних зовнішніх сил, а також у разі наявності кінематичних збуджень. Рідина вважається ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух вважається безвихровим. Така модель рідини обумовлена тем, що у більшості важливих практичних задач число Рейнольдса лежить у діапазоні  $10^5 \leq Re \leq 10^6$ , що дозволяє під час моделювання властивостей в'язкості обмежитися припущеннями теорії примежового шару, а для даного класу задач це зводиться до включення у математичну модель сил узагальненої дисипації, визначених на основі допоміжних [1]. Розглядається випадок, коли резервуар представляє собою кругову циліндричну область, хоча вже розглянуті варіанти резервуарів у вигляді тіл обертання [5]. Далі використовується математична модель [3, 4], яка була багатократно протестована на різних задачах, включаючи якісне порівняння з даними експериментів.

Модель системи є математичним об'єктом неоднорідної структури. Рідина описується як континуальна модель (рівняння у частинних похідних), а рух конструкції – у формі системи звичайних диференціальних рівнянь. Для переходу до математичного об'єкту однорідної структури використано метод модальної декомпозиції (варіант метода Канторовича), коли рух вільної поверхні рідини задається у вигляді розкладу по формах вільних коливань:

$$\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta),$$

де  $\psi_n(r, \theta)$  – форми вільних коливань рідини з вільною поверхнею;  $a_n(t)$  – амплітуда коливань вільної поверхні рідини за  $n$ -ю формою. Для опису руху рідини у всьому об'ємі використано потенціал швидкостей  $\Phi = \varphi_0 + \dot{\xi} \cdot \vec{r}$ , де  $\varphi_0$  – потенціал швидкостей хвильового руху рідини;  $\dot{\xi} \cdot \vec{r}$  – потенціал швидкостей поступального руху системи, тут  $\dot{\xi}$  – вектор швидкості поступального руху системи,  $\vec{r}$  – радіус-вектор довільної точки області, яку займає рідина, якщо за початок відліку прийняти центр незбудженої вільної поверхні рідини. Для потенціалу швидкостей приймаються такий розклад по власним формам:

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\operatorname{ch} \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \operatorname{sh} \kappa_n H},$$

де  $b_n(t)$  – амплітудні параметри потенціалу, які за методикою [2, 3] виражаються через амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини  $a_n(t)$ . Можливість описувати рух рідини лише через рух її границь (параметри руху вільної границі і рух стінок резервуара) визначаються теоремою про те, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь. Тому за незалежні параметри прийнято амплітуди збудження форм коливань вільної поверхні рідини  $a_i$  і параметри поступального  $\varepsilon_i$  руху конструкції. Обрані параметри повністю характеризують динаміку системи і по цим параметрам можна повністю відновити характеристики руху вільної поверхні рідини  $\xi$ , поле швидкостей рідини, поле тисків.

У математичному плані система рівнянь руху представляє собою нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, у якій другі похідні невідомих входять лінійно, що створює передумови для аналітичного приведення системи рівнянь руху до форми Коші, зручної для подальшого чисельного інтегрування. Система рівнянь руху має такий вигляд [3] **Помилка! Джерело посилання не знайдено.**

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \dot{\varepsilon} \cdot \left[ \sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \right. \\ \left. + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk}^4 \right] - g \frac{N_r}{\alpha_r^v} a_r. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left( \vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\varepsilon} = \\ = \frac{\vec{F}}{M_F + M_T} + \vec{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Вказана система рівнянь включає в себе  $N + 3$  ступеня вільності, де  $N$  – кількість форм коливань рідини, які беруться до уваги. У роботі [3] показано як обирати черговість розташування форм коливань, їх загальну кількість і способи моделювання нелінійних властивостей для адекватного моделювання сумісного руху складових системи. У системі рівнянь (1), (2) багатоіндексні коефіцієнти є квадратурами від форм коливань вільної поверхні рідини, а їхні значення наведені у [3]

## Чисельний приклад

Розглянемо випадок поступального руху конструкції з рідиною у горизонтальній площині. У цьому випадку рух конструкції повністю задається лише одним параметром поступального руху  $\varepsilon_y$ , відповідно, два інших рівняння за напрямками  $x$  та  $z$  із системи рівнянь (2) опускаються. Прийнято нелінійну модель, яка враховує  $N=12$  форм коливань вільної поверхні рідини. Чисельні результати отримані для випадку резервуара у вигляді вертикально розташованого кругового циліндричного резервуара радіуса  $R=1$  м, з глибиною заповнення  $H=1$  м водою. Загальна схема руху такої системи показана на рис. 1.

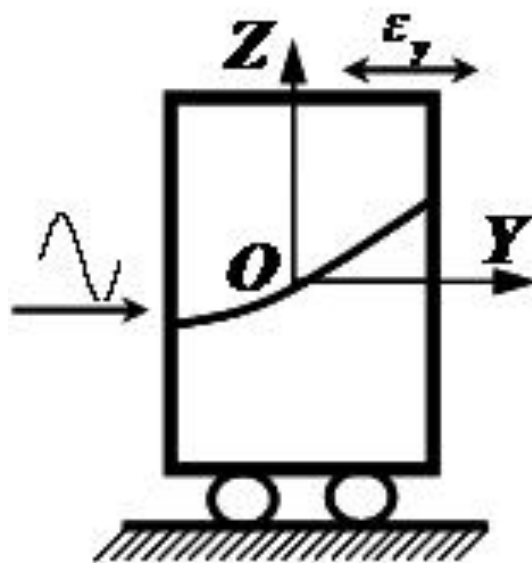


Рис. 1. Загальна схема задачі

Розглядається випадок, коли маса рідини у п'ять разів перевершує масу резервуара, тобто коли вплив рухомості рідини є вагомим  $m_r = 0,2M_l$  ( $m_r$  – маса резервуара,  $M_l$  – маса рідини),  $R$  – радіус резервуара, глибина заповнення резервуара  $H=R$ . Результати обчислень представлені у безрозмірному вигляді віднесенням лінійних розмірів до радіусу резервуара.

Розглянуто два випадки силового горизонтального навантаження на систему у вигляді пилоподібного (суцільна крива на рисунках) і синусоїдального (штрихова крива на рисунках) навантажень ьз частотою  $3,0$  1/с (зауважимо, що частота коливань рідини ьз вільною поверхнею по першій формі  $4,14$  1/с) із амплітудою  $5$  kN. На рис. 1 показано зміну у часі збурень вільної поверхні рідини на стінці у площині руху системи, а на рис. 2 наведено результати зміни швидкості руху резервуара у часі. Як бачимо на рис. 1 коливання вільної поверхні рідини відбувалися у межах  $0,2$ – $0,35$  радіуса, тобто у нелінійному діапазоні. Хвильовий рух рідини для пилоподібного імпульсу за амплітудою є меншим ніж у випадку синусоїдального імпульсу. В обох випадках спостерігається ефект амплітудної модуляції

коливань, а для пилоподібного імпульсу ще помітний і ефект частотної модуляції. Це вказує на невпорядкованість характеру коливань для пилоподібного імпульсу у порівнянні із гармонічним навантаженням.

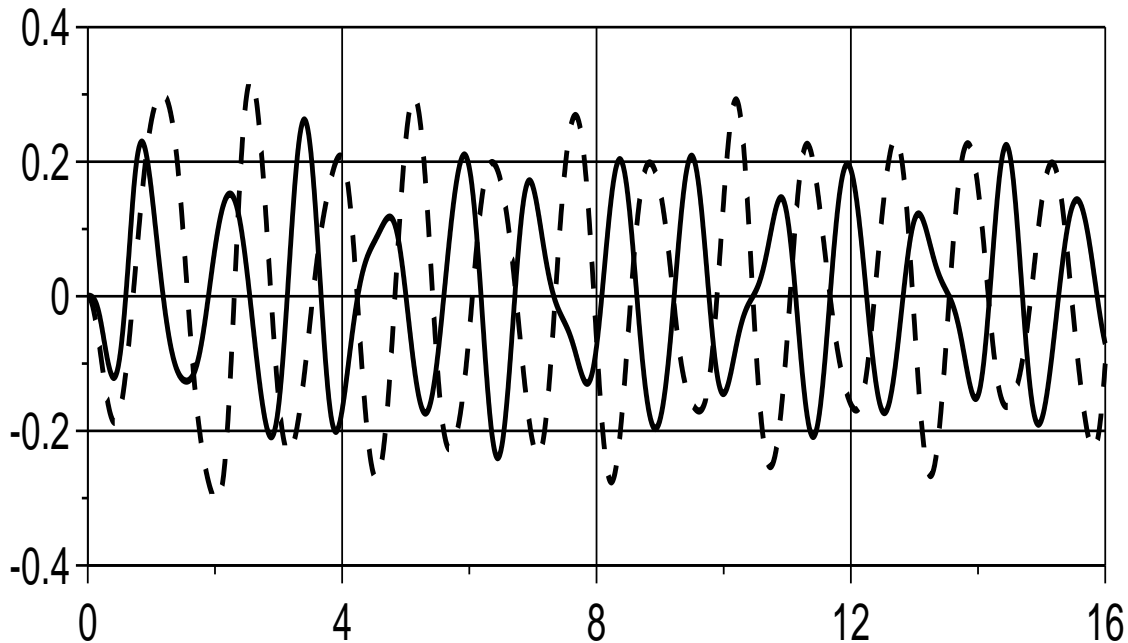


Рис. 2. Збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуара

Аналіз квазітвердого руху системи (рис. 3) свідчить про те, що швидкість руху резервуара для пилоподібного імпульсу буде також меншою за випадок синусоїдального імпульсу. Модуляційні ефекти в обох випадках є менш помітними. Особливо на етапі руху системи за інерцією. Зменшення амплітуд коливань обох кінематичних параметрів обумовлена тим, що синусоїдальний імпульс надає системі більшу кількість руху у порівнянні із пилоподібним імпульсом (це помітно через порівняння площ геометричних фігур цих імпульсів).

### Висновки

На основі раніше розробленої аналітичної моделі динаміки сумісного руху конструкції з рідиною у нелінійному діапазоні збурень вивчено характер поведінки системи під час збудження її руху пилоподібним силовим імпульсом.

Дано порівняння отриманих результатів із випадком синусоїдального силового імпульсу. Показано наявність ефектів амплітудної і частотної модуляції у коливаннях вільної поверхні рідини. Прояснено причини зменшення амплітуд коливань системи для пилоподібного імпульсу у порівнянні із синусоїдальним імпульсом.

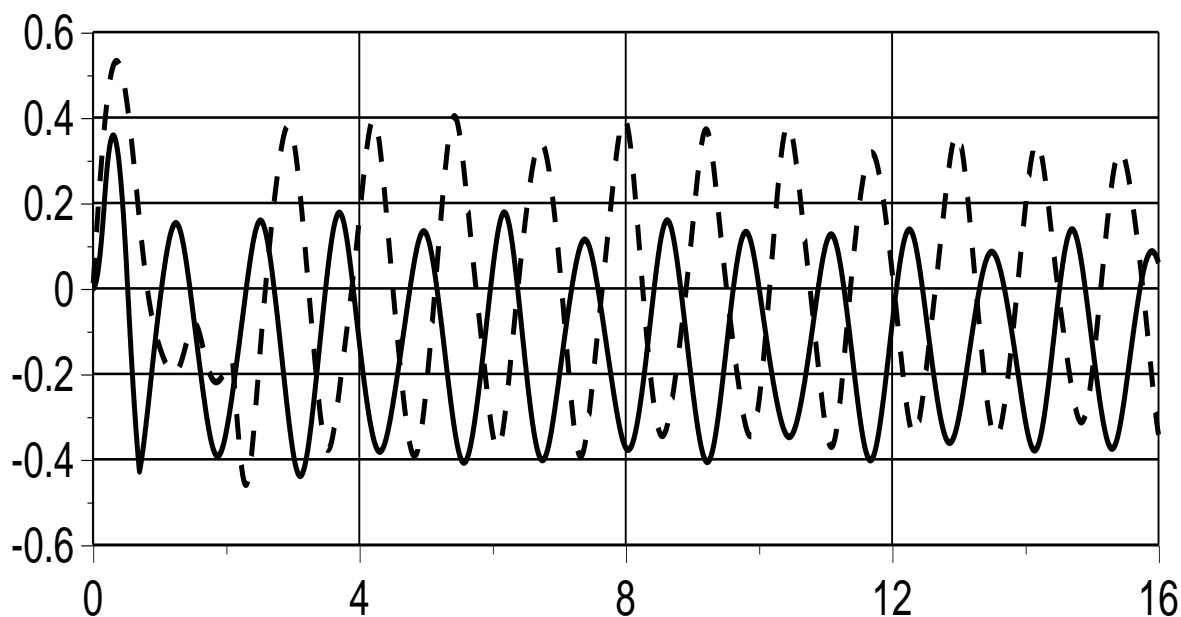


Рис. 3. Швидкість руху резервуару

#### Список використаної літератури

1. *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.
2. *Микишев Г. Н.*, Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович // М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
3. *Лимарченко О. С.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью / О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский // Киев: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
4. *Лимарченко О. С.* Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О. С. Лимарченко, Дж. Матараццо, В. В. Ясинский // Киев: «Гнозис». – 2002. – 304 с.
5. *Лимарченко О. С.*, Губська В. В. Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною // Вісник Київського нац. ун-та ім. Тараса Шевченка. – 2012. – 1, № 4. – С. 73 – 76.