

УДК 658.562.012.5

DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/2219-3804172017118881>Є. Т. Володарський<sup>1</sup>, професор, д. т. н.,М. В. Добролюбова<sup>2</sup>, доцент, к. т. н.,М. О. Клевцова<sup>3</sup>, директор, здобувач

## АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ШУХАРТА

**En**

The article is devoted to the analysis of the Shewhart control charts sensitivity for quantitative data depended on the number of sample values, on the basis of which the current values  $\bar{x}$  and  $S$  are calculated, and depends on the probability of choosing the control limits.

The sensitivity of the Shewhart control charts is their ability to detect possible changes in the technological process, i.e. the appearance of the process biasing or its values scattering increasing.

Sensitivity analysis for mean values control charts was carried out. Sensitivity is estimated based on the mean length of the series – the mean number of samples. The samples are taken and analyzed through the same time intervals. It is supposed that the sample mean values are not correlated. As shown by the analysis, the sensitivity depends on the number of elements in the samples for mean value charts. In relation to corrective actions, the chart sensitivity of average values for the number of values in the sample  $n=4$  is 20% is less than at  $n=5$ . This can significantly increase the allowable losses due to the reduction of product quality produced in small batches. The dependence at  $n=3$  is additionally presented to reflect the effect of the sample volume.

$S$ -charts sensitivity analysis is carried out. It indicates that assertion regarding the numerical values in the samples in the normative documents ( $n=4 \div 5$  and in some cases 3) is fair.

When using  $\bar{X}$  - and  $S$  -charts together, the process is considered to be statistically manageable in the case when both charts confirm this. Practically the simultaneous shift of the normalized value of the technological process and scattering increase is almost not observed. Therefore, this case is more theoretical.

The knowledge of the control charts sensitivity (the number of steps of sampling control) allows us to determine the intervals between samples and introduce additional warning boundary values, when it is necessary, provided that the technological process is short-lived (typical for low-power production).

This is especially true for low-power enterprises, where the assortment of products varies relatively often and the correct construction of the control process is a guarantee of the products quality.

**Ru**

Рассмотрено понятие чувствительности контрольных карт Шухарта (число шагов выборочного контроля), которая позволяет при относительно

<sup>1</sup> НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», кафедра автоматизації експериментальних досліджень

<sup>2</sup> НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», кафедра автоматизації експериментальних досліджень

<sup>3</sup> ТОВ «Фабрика «Світязь», здобувач НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

малой продолжительности технологического процесса, что характерно для маломощного производства, обосновано устанавливать интервалы между выборками и, при необходимости, вводит дополнительные предупреждающие граничные значения. Проведен анализ чувствительности для контрольных карт средних значений и для  $S$ -карт и обоснована ее зависимость от числа элементов в выборках.

### **Вступ**

Необхідність вдосконалення підходів із забезпечення якості продукції як в цілому, так і на окремих стадіях виробничого процесу виникла достатньо давно та залишається актуальною сьогодні. З метою підвищення економічних показників виробничого процесу та зниження виробничих витрат у 1924 р. американським інженером та математиком Уолтером Шухартом був запропанований доволі простий інструмент, заснований на методах теорії ймовірності та математичної статистики і є таким, що дозволяє підтримувати процес у статистично стійкому стані та запобігати появі невідповідностей, який отримав назву контрольних карт Шухарта [1].

Існує декілька типів контрольних карт. У першу чергу вони відрізняються за видом даних, що використовуються для їх побудови, та вибірковими статистичними показниками (вбірковими статистиками), які використовуються для аналізу ходу і результатів процесу.

За цією ознакою розрізняють:

- 1) контрольні карти для кількісних даних (для кількісної ознаки);
- 2) контрольні карти для альтернативних даних (для альтернативної ознаки).

Найбільш часто на практиці використовуються контрольні карти для кількісних даних, де об'єднують контрольні карти середніх арифметичних значень і вибірових стандартних відхилень (або розмахів).

### **Постановка задачі**

Метою даної статті є аналіз залежності чутливості кількісних карт від числа вибірових значень, за якими обчислюються поточні значення  $\bar{x}$  і  $s$ , та від ймовірності вибору контрольних границь. Це особливо актуальне питання для малопотужних підприємств, де номенклатура виробів змінюється відносно часто і правильна побудова контрольного процесу є запорукою якості виробів.

### **Основний зміст досліджень**

Під чутливістю карт Шухарта розуміється їх здатність до виявлення можливих змін у технологічному процесі – поява зміщення процесу або збільшення розсіювання його значень [2]. Чутливість оцінюється на основі

середньої довжини серії – середнього значення числа вибірок, які беруться та аналізуються через однакові інтервали часу. У такому разі допускається, що вибіркові середні не корельовані.

Будемо виходити із того, що у момент часу  $t$  технологічний процес розладився, виникло зміщення, що дорівнює  $\delta\sigma$ . Необхідно визначити за скільки кроків (через скільки вибірових середніх)  $\bar{X}$ -карта відреагує на цю зміну, тобто перше із вибірових середніх вийде за границі попереджувальної ( $\alpha = 0,05$ ) або лінії дії ( $\alpha = 0,01$ ).

Допустимо, що ймовірність виходу контролюємого показника за границю карти складає  $p$ .

Позначимо  $Y$  – значення дискретної випадкової величини «вихід за граничне значення», які відповідають події встановлення зміщення технологічного процесу.

Тому значення  $Y = 1$  відповідає події, що зміщення було виявлено на першому кроці побудови  $\bar{X}$ -карти, тобто  $P(Y = 1) = p$ . Якщо це було виявлено на другому кроці, то ймовірність для цього випадку дорівнює  $P(Y = 2) = (1 - p)p$ . У загальному випадку для  $k$ -го кроку маємо

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p. \quad (1)$$

Математичне сподівання дискретної випадкової величини [3] записується як

$$M(Y) = \sum_{i=1}^k y_i p(y_i).$$

Виходячи з цього, з врахуванням виразу (1), математичне сподівання виходу середнього вибірового на  $k$ -ому кроці за лінію дій буде

$$M(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - p)^{k-1}. \quad (2)$$

Вираз (2) якраз відповідає середній довжині серії  $L(\delta)$ , яка включає  $k$  кроків у разі виявлення виникнення зміщення технологічного процесу.

Середня довжина характеризує «затримку»  $\bar{X}$ -карти Шухарта по відношенню до часу виникнення розладки/зміщення процесу.

Розглянемо окремо другий множник у виразу (2). Зробимо заміну  $(1 - p) = q$  і введемо позначення  $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = S(q)$ .

Поділимо обидві частини рівності на  $q$  та проінтегруємо

$$\int_0^q \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} dq = \int_0^q \frac{S(q)}{q} dq; \quad 0 < q < 1.$$

Отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \int_0^q \frac{S(q)}{q} dq.$$

Ліва частина цього виразу являє собою геометричний ряд  $q + q^2 + q^3 + \dots$ , сума якого дорівнює  $q/(1-q)$ .

Таким чином маємо

$$\frac{q}{1-q} = \int_0^q \frac{S(q)}{q} dq.$$

Візьмемо похідну і отримаємо

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{S(q)}{q}.$$

Звідси маємо

$$S(q) = \frac{q}{(1-q)^2} \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (3)$$

Після підстановки (3) із урахуванням  $q = (1-p)$  у вираз (2) отримаємо

$$L_{\bar{x}}(\delta_t) = p^{-1}. \quad (4)$$

Тут індекс  $t$  враховує факт появи зміщення у момент часу  $t$ .

Так при  $\delta = 0$ , тобто зміщення відсутнє,  $p_t(0) = \alpha$  (помилка рішення 1-го роду) і середня довжина вибірових значень обумовлена впливом тільки випадкових величин та дорівнює  $L_{\bar{x}}(0) = 1/\alpha$ .

При статичному управлінні висувається гіпотеза, що центральна лінія  $\bar{X}$ -карти будується за умовою  $\mu_t = \mu_0$ , тобто відповідно до норми на контрольований показник. Тоді наявність зміщення процесу із точки зору теорії перевірки статистичних гіпотез відповідає відхиленню гіпотези  $H_0$ :  $\mu_t = \mu_0$ .

Невтручання у технологічний процес відбувається коли поточне середнє вибірове значення знаходиться у межах контрольних границь із заданою ймовірністю  $P = (1 - \alpha)$ .

Приймаючи до уваги, що  $\bar{x}$  розподілено за нормальним законом із дисперсією  $\sigma_0/\sqrt{n}$  та центром розподілу  $\mu_0$ , ймовірність невтручання у процес, тобто не виходу поточного вибірового середнього за граничні значення буде [3]

$$P_{\bar{x}}(\mu_t) = P\left(\mu_0 - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_0 \sqrt{n} < \bar{x} < \mu_0 + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_0 \sqrt{n}\right), \quad (5)$$

де  $u_{1-\alpha/2}$  – квантіль нормованого нормального розподілу, який відповідає граничним значенням (попереджувальним за  $\alpha = 0,05$  і дії за  $\alpha = 0,01$ ).

Розглянемо ймовірність невтручання у технологічний процес під час його розладу, тобто коли центр розподілу став  $\mu_t$ . Перейдемо від аналізу поточних середніх значень до нормованих та центрованих величин  $z = (\bar{x} - \mu) / \sigma_0 / \sqrt{n}$ . Тоді вираз (5) можна записати як

$$P_{\bar{x}}(\mu_t) = \Phi\left(\frac{\mu_0 + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_0 \sqrt{n} - \mu_t}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_0 \sqrt{n} - \mu_t}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right). \quad (6)$$

Тут  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  – функція стандартного нормального розподілу, значення якої табульовано.

Абсолютне значення зміщення процесу  $\Delta = \mu_0 - \mu_t$ , із урахуванням якого вираз (6) переписеться як

$$P_{\bar{x}}(\mu_t) = \Phi\left(\frac{\Delta_t + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_0 \sqrt{n}}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta_t - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_0 \sqrt{n}}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right).$$

Перейдемо до безрозмірної величини  $\delta_t = \Delta_t / \sigma_0$ , тоді останній вираз переписеться як

$$P_{\bar{x}}(\delta_t) = \Phi(\delta_t \sqrt{n} + u_{1-\alpha/2}) - \Phi(\delta_t \sqrt{n} - u_{1-\alpha/2}). \quad (7)$$

Змінна  $\delta_t$  характеризує відхилення поточного рівня налагодження процесу  $\mu_t$  від заданого значення  $\mu_0$ , яке нормоване по відношенню до стандартного відхилення  $\sigma_0$  незбуреного процесу.

Виходячи із виразу (7), ймовірність виходу вибіркового значення за границю визначається як

$$\bar{P}_{\bar{x}}(\delta_t) = 1 - P_{\bar{x}}(\delta_t). \quad (8)$$

У такому разі необхідно приймати до уваги властивість нормального розподілу  $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ .

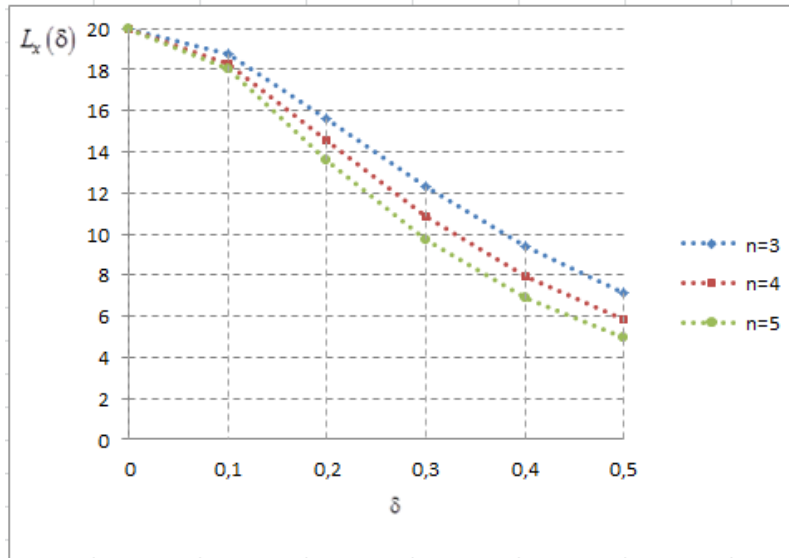
Аналогічно за виразом (4) із урахуванням (8) остаточно отримуємо

$$L_x(\delta_t) = [\bar{P}_{\bar{x}}(\delta_t)]^{-1}.$$

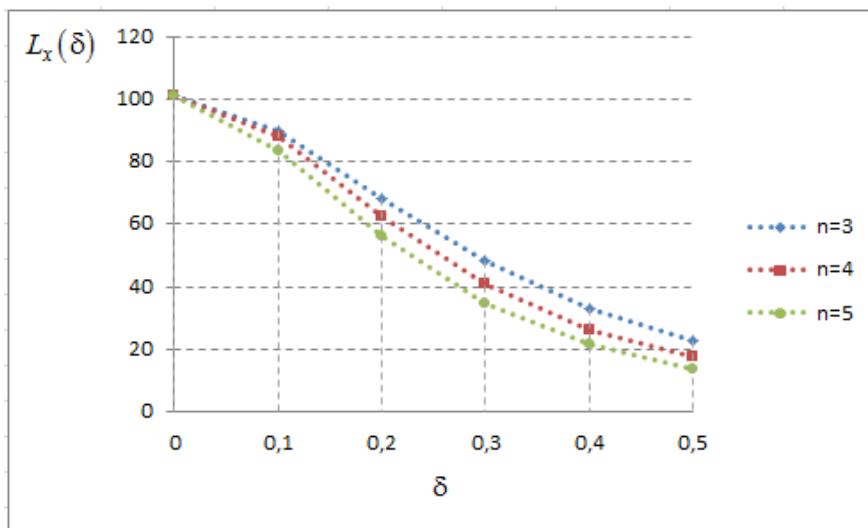
На рис. 1 наведені залежності зміни середньої довжини  $L_x(\delta)$  від значення  $\alpha$  та числа вибірових даних до кожної контрольної точки.

Із наведених графіків можна зробити висновки про чутливість  $\bar{X}$ -карти до розладки технологічного процесу. Так, у разі зміщення контрольованого рівня процесу  $\mu_0$  від норми на  $0,4\sigma_0$  вихід першого вибіркового середнього за границі попереджувальної лінії відбудеться приблизно

через 8 та 7 для вибірок у 4 та 5 елементів ( $\alpha=0,05$  та  $\alpha=0,01$  відповідно), а за границі лінії дії через 26 та 21 кроки ( $\alpha=0,05$  та  $\alpha=0,01$  відповідно). Таким чином, по відношенню до корегуючих дій чутливість  $\bar{X}$ -карти за  $n=4$  на 20 % менше, ніж за  $n=5$ . Це може суттєво збільшити допустимі втрати за рахунок зменшення якості продукції, яка випускається невеликими партіями.



а)



б)

Рис. 1. Залежності зміни середньої довжини  $L_x(\delta)$  від значення  $\alpha$  та числа вибірових даних до кожної контрольної точки:  
а) за  $\alpha = 0,05$ ; б) за  $\alpha = 0,01$

Для відображення впливу об'єму вибірки додатково наведена залежність при  $n=3$ .

Під час побудови  $S$ -карти вихідним є вибіркове стандартне відхилення, яке обчислюється на основі  $n$  значень  $S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$ .

Вибіркові значення  $x_i$  належать до генеральної сукупності, що розподілена за нормальним законом з центром  $\mu_0$  і дисперсією  $\sigma_t$ , яка в загальному випадку відрізняється від номінального значення  $\sigma_0$ , що відповідає нормальному протіканню процесу, тобто  $\sigma_t = \varepsilon_t \sigma_0$ , де  $\varepsilon_t$  – коефіцієнт розладки процесу.

У разі нормального протікання технологічного процесу буде справедливо (за умови одностороннього граничного значення) [3]

$$P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n-1;1-\alpha}^2\right) = 1 - \alpha, \quad (9)$$

де  $\chi_{n-1;1-\alpha}^2$  – квантіль розподілу  $\chi^2$ -Пірсона за число степенів свободи  $\nu = (n-1)$  та ймовірності  $(1-\alpha)$ .

Після простих перетворень з виразу (9) отримаємо

$$P\left(S_n \leq \sqrt{\frac{\chi_{n-1;1-\alpha}^2}{n-1}} \cdot \sigma_0\right) = 1 - \alpha. \quad (10)$$

Складова, що стоїть у правій частині нерівності є одностороннім довірчим інтервалом для контрольної величини  $S_n$  у разі довірчій ймовірності  $P = 1 - \alpha$ .

Значення для лінії дії  $CL$  (втручання у технологічний процес) отримуємо з (10) за  $\alpha = 0,01$ .

$$CL = \sqrt{\frac{\chi_{n-1;0,99}^2}{n-1}} \cdot \sigma_0. \quad (11)$$

Тоді для поточного, робочого процесу, тобто за  $\sigma_t \neq \sigma_0$ , ймовірність виходу значення  $S_n$  за граничне значення  $CL$  буде

$$P(S_n \geq CL | \sigma_t) = 1 - P\left(S_n^2 < \frac{\chi_{n-1;0,99}^2}{n-1} \cdot \sigma_0^2 | \sigma_t\right). \quad (12)$$

Помножимо нерівність, що стоїть у дужках виразу (12) на  $(n-1)/\sigma_t^2$  і отримаємо

$$P(S_n \geq CL | \sigma_t) = 1 - P\left(\chi^2 < \frac{\chi_{n-1;0,99}^2}{(\sigma_t/\sigma_0)^2} | \sigma_t\right). \quad (13)$$

Функція розподілу випадкової величини  $\chi^2$  залежить від  $\nu = (n-1)$  [3]. Тому подальший аналіз необхідно проводити для контрольного значення числа степенів свободи  $\nu$ , а саме

$$P\left(\chi^2 < \frac{\chi_{n-1;0,99}^2}{(\sigma_t/\sigma_0)^2} | n-1\right). \quad (14)$$

Отже, вираз (14) представляє собою інтегральну функцію  $F(\bullet | n-1)$   $\chi^2$ -розподілу із  $(n-1)$  ступенями свободи, для якої не існує таблиць, але деякі значення її можуть бути обчислені із таблиць розподілу  $\chi^2$ -Пірсона за допомогою зворотної функції  $F^{-1}(\bullet | n-1)$ . У такому разі треба врахувати, що у таблиці наведені значення  $\chi^2$ , які відповідають ймовірності  $P(\chi^2 > \chi_{n-1;0,99}^2)$ .

Прийнявши до уваги, що  $\sigma_t/\sigma_0 = \varepsilon_t$ , запишемо рівняння, яке відповідає ймовірності події, що поточне вибіркоче значення  $S_n$  вийде за границю дії/втручання

$$\bar{P}_S(\varepsilon_t) = P\left(\chi^2 > \frac{\chi_{n-1;0,01}^2}{\varepsilon_t^2} | n-1\right).$$

Згідно (2) середня довжина серій  $S$ -карти визначається з залежності

$$L_S(\varepsilon_t) = \left[ P\left(\chi^2 > \frac{\chi_{n-1;0,01}^2}{\varepsilon_t^2} | n-1\right) \right]^{-1}.$$

Відповідні криві, які відображають залежність довжини серій від  $\varepsilon_t$  для різних значень ймовірності хибної тривоги наведені на рис. 2.

Коли використовуються  $\bar{X}$ - та  $S$ -карти разом, то процес вважається статистично керованим в тому випадку, коли це підтверджують обидві карти. Приймаючи до уваги, що показники рівня налаштування  $\delta_t$  та розсіювання  $\varepsilon_t$  технологічного процесу незалежні величини, ймовірність невтручання в хід процесу визначається як добуток відповідних ймовірностей

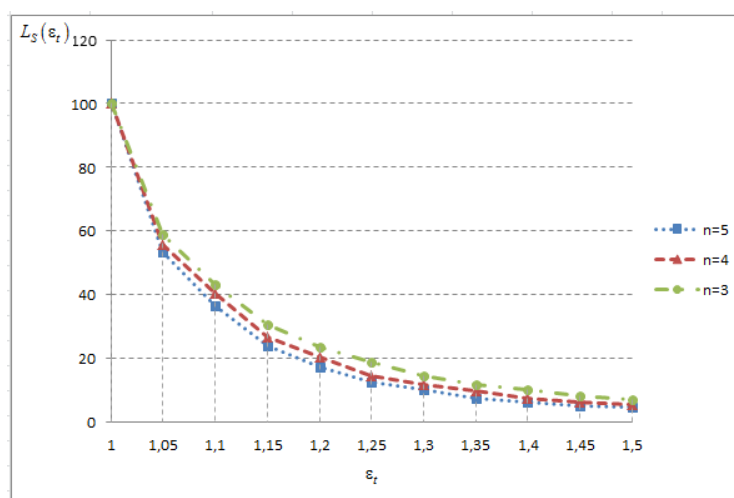
$$\bar{P}_{\bar{x},S}(\delta_t, \varepsilon_t) = (1 - P_{\bar{x}}(\delta_t))(1 - P_S(\varepsilon_t)).$$

Тоді середня довжина серій за одночасного використання  $\bar{X}$ - та  $S$ -карти разом буде

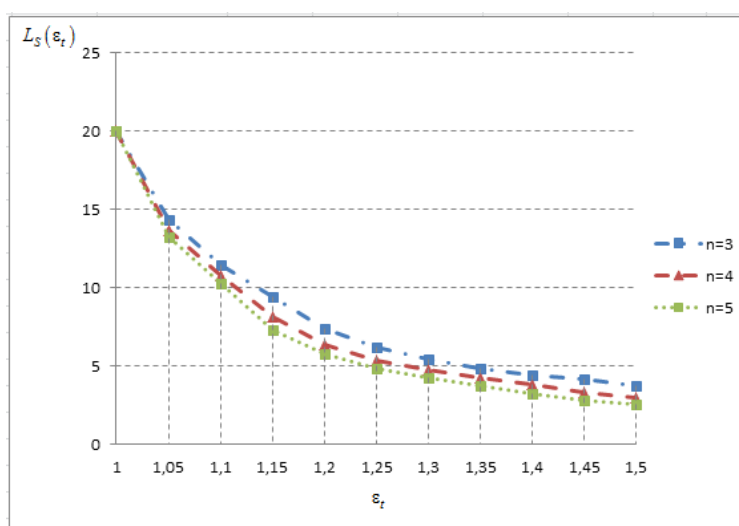
$$L_{\bar{x},S}(\delta_t, \varepsilon_t) = \left[ 1 - \bar{P}_{\bar{x},S}(\delta_t, \varepsilon_t) \right]^{-1}.$$



Практично одночасне зміщення нормованого значення технологічного процесу та збільшення розсіювання його майже не зустрічається. Тому цей випадок більше носить теоретичний характер.



а)



б)

Рис. 2. Криві  $L_S(\varepsilon_t)$ , які відображають залежність довжини серій від  $\varepsilon_t$  для різних значень ймовірності хибної тривоги: а) за  $\alpha = 0,01$ ; б) за  $\alpha = 0,05$

## Висновки

Знання чутливості контрольних карт – числа кроків вибіркового контролю, дозволяє у разі відносно малої тривалості технологічного процесу, що характерно для малопотужних підприємств, обґрунтовано установлювати інтервали між вибірками і, за необхідності, вводити додаткові попереджувальні граничні значення.

У нормативних документах вказано, що число значень у вибірках має бути 4–5 (у деяких випадках може бути і 3). Як показав проведений аналіз, це ствердження справедливо для  $S$ -карт. Для карт середніх значень чутливість залежить від числа елементів у вибірках і це необхідно враховувати під час організації системи забезпечення якості продукції, особливо для малопотужних підприємств.

### Список використаної літератури

1. *Mittag X. -Й.* Статистические методы обеспечения качества : пер. с нем. / X.-Й. Миттаг, X. Ринне. – М: Машиностроение, 1995. – 616 с.
2. ДСТУ ISO 8258-2001 Контрольні карти Шухарта (ISO 8258-1991 IDT).
3. *Doksum Kjell A.* Mathematical Statistics: Basic and Selected Topics 1 / Kjell A. Doksum. – 2nd ed. – Pearson Prentice-Hall, 2007. – 576 с.